ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

İST 213 OLASILIK DERSİ

SÜREKLİ DAĞILIMLAR-2

DOÇ. DR. NİHAL ERGİNEL

2015

WEIBULL DAĞILIMI

Weibull dağılımı, pek çok farklı sistemlerin bozulana kadar geçen süreleri ile ilgilenir. Dağılımın parametreleri sistemin modellenmesine büyük esneklik sağlarlar. Burada hata (bozulma) sayıları zamana bağlı olarak artar, azalır veya aynı kalır.

WEIBULL DAĞILIMI

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\delta}.(\frac{x-\gamma}{\delta})^{\beta-1}.e^{-(\frac{x-\gamma}{\delta})^{\beta}} & \delta,\beta>0 \ ; -\infty<\gamma<\infty \ ; x\geq\gamma \\ 0 \ ; dd & \end{cases}$$

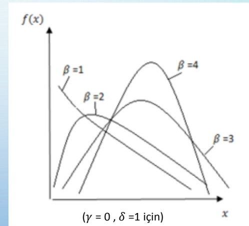
γ : yer parametresi

δ : ölçek parametresi

β :şekil parametresidir.

Birikimli olasılık fonksiyonu;

$$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\delta}\right)^{\beta}} \; ; \; x \geq \gamma \\ 0 \; ; \; x < \gamma \end{cases}$$



Aritmetik ortalaması:

B[X]= $\gamma + \delta.\tau\ (1+\frac{1}{\beta})$

Varyansı:

V(X)= $\delta^2\ (\tau\ (1+\frac{2}{\beta})\ ) - .\tau\ (1+\frac{1}{\beta})^{2}$

Weibull dağılımında β =1 , γ = 0 olursa parametresi

$\lambda = \frac{1}{\delta}$ olan üstel dağılım olur.

- Weibull dağılımı, pozitif rassal değişkenli bir dağılımdır. Bekleme modelleri, yaşam tabloları, öğrenme zamanı, radyoaktivite yoğunluğu, m^2 ' ye düşen yağmur miktarı, vb. weibull dağılımı ile modellenebilir. Özellikle güvenilirlik çalışmalarında weibull dağılımı kullanılır.

ÖRNEK:

Bir elektrik parçanın hata meydana gelene kadar geçen sürenin , γ = 0 , β =1/2 ve δ =100 saat ile weibull dağılımına uyduğu tespit edilmiştir.

a-) Bozulana kadar en az 400 saat çalışması olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

X: elektrikli parçanın hata meydana gelene kadar geçen süresi (saat)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{200} \cdot \left(\frac{x}{100}\right)^{-1/2} . e^{-\left(\frac{x}{100}\right)^{1/2}} ; x \geq 0 \\ 0 \, ; dd \end{cases}$$

P(X>400) = 1- P(X<400) = 1- F(400)

$$= 1- (1-e^{-\left(\frac{400-0}{100}\right)^{1/2}}) = 0,1353$$

ÇÖZÜM:

b) hata meydana gelene kadar geçen sürenin ortalamasını bulunuz.

$B[X] = \gamma + \delta . \Gamma \, (1+\frac{1}{\beta})$

$= 100.\Gamma(1+2)$

$= 100 .(3-1)! = 200$ saat

$\Gamma(3) = (\alpha-1\,)! = 2!$

ÖRNEK:

Bir mekanik shaftın bozulma zamanı γ = 0 , β =1/2 ve δ =5000 saat ile weibull dağılıma uyduğu tespit edilmiştir. Bozulana kadar geçen sürenin ortalamasını bulunuz.

ÇÖZÜM:

B[X] = $\gamma + \delta.\boldsymbol{\Gamma}(1+\frac{1}{\beta})$

= 5000.$\boldsymbol{\Gamma}$(1+2) = 5000 .(3-1)! = 10000 saat

$\boldsymbol{\Gamma}$(3) = (∝ -1)! =2!

b) Bozulan kadar en az 6000 saat çalışması olasılığını bulunuz.

P(X>6000)= 1- F(6000)

= 1-(1-$e^{-\left(\frac{6000}{5000}\right)^{1/2}}$) = 0,334

NORMAL DAĞILIM

X rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu, b>0 ve a ∈ R iken,

f(x)= $\frac{1}{\sqrt{2\pi}.b}.e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}$; -∞<x<∞

Normal dağılım ilk kez Binom'un özel bir durumu olarak 1733'de De Moiure tarafından önerilmiş, daha sonra Laplace çalışmış,1809'da Gauss tarafından şekillendirilmiştir. Gauss fonksiyonu da denmektedir.

$\mu = B[X] = a$

$\sigma^2 = b^2$

$\mu(t)_x = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$

Standart Normal Dağılım

$Z \sim N(0,1)$

$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{(Z)^2}{2}}$; $-\infty < x < \infty$

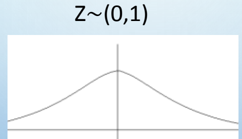
Standart normal dağılımı baz alan Normal dağılım tabloları oluşturulmuştur.

Normal dağılmış rassal değişkenleri $Z = \frac{x-a}{b}$ formülü ile standart normal dağılıma dönüştürmek mümkündür

veya $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

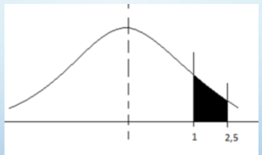
Normal Dağılım Tablosu Kullanılarak Olasılık Değerlerinin Hesaplanması

$Z \sim (0,1)$



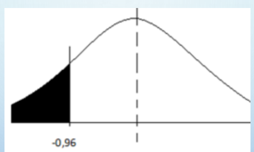
Eğri altında kalan alanın toplamı 1'dir.Simetrik bir dağılımdır.

ÖRNEK:



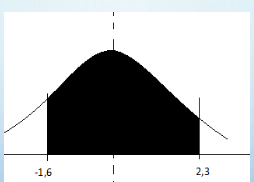
$P(1<Z< 2,5) = 0,4938-0,3413=0,1525$

ÖRNEK:

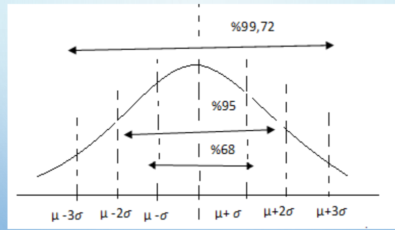


$P(Z\leq 0,96) = 0,5-0,3315=0,1685$

ÖRNEK:



$P(-1,6 <z \leq 2,3) = 0,4452+0,4893=0,9345$



ÖRNEK:

Bir telin kalınlığı ortalaması 10 miliamper, varyansı 4 $milliamper^2$ olarak normal dağılmıştır.

a) Bu telin kalınlığının 13 miliamperi geçmesi olasılığı nedir?

X: telin kalınlığı (miliamper)

X ~ N(10,4)

P(X>13)= P($\frac{X-\mu}{\sigma}$ > $\frac{13-10}{2}$)

= P(Z>$\frac{3}{2}$)

= P(Z>1,5) = 0,0668

ÖRNEK-devam:

b) Telin kalınlığının 9 ile 11 miliamper arasında çıkması olasılığı nedir?

P(9≤ X ≤ 11) = P($\frac{9-10}{2}$ ≤ Z ≤ $\frac{11-10}{2}$

= P(-0,5 ≤ Z ≤0,5)

= 2(0,19146)

=0,38292

ÖRNEK-devam:

c)Tel kalınlığının hangi değerden az olması %98 olasılıkla ortaya çıkmaktadır?

P(X < x) =0,98

P(Z< $\frac{x-\mu}{\sigma}$) = P(Z< $\frac{x-10}{2}$) =0,98

P(Z< 2,05) = 0,97982

2,05 = $\frac{x-10}{2}$

X= 14,1 miliamper

ÖRNEK:

Bir milin iç çap ölçüsü ortalaması 0,2508 inch, standart sapması 0,0005 inch olarak Normal dağılmaktadır. Bu ölçünün spesifikasyonları 0,2500 $\pm$ 0,0015 olarak teknik resimde belirtilmiştir. Mevcut üretimin, spesifikasyonlarını sağlayan mil oranı nedir? Eğer bir günde ilgili millerden 500 adet üretiliyor ise, günlük hatalı mil sayısı kaç adet beklenmektedir?

ÇÖZÜM:

X: milin iç çap ölçüsü

X ~ N (0,2508; 0,0005^2)

P(0,2485 $\leq$ X $\leq$ 0,2515)

= P($\frac{0,2485-0,2568}{0,0005}$ $\leq$ Z $\leq$ $\frac{0,2515-0,2508}{0,0005}$

= P(-4,6 $\leq$ Z$\leq$ 1,4) = 0,91924-0= 0,91924

Hatalı oranı= 1-0,91924=0,08076

Günlük beklenen hatalı mil sayısı= 500*0,08076=40,38 adet

ÖRNEK:

Bir çamaşır makinesinin tamir edilme süresi ortalaması 120 dk., varyansı 16 $dk.^2$ olmak üzere normal dağılmaktadır.

a) Eğer aylık 1000 adet tamirat gerçekleştirilirse, tamir edilme süresi 125 dk. 'nın üzerinde olan çamaşır makinesi sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM: X: tamir edilme süresi(dk.)

P(X>125)= P(Z>$\frac{125-120}{4}$) = P(Z>1,25)=0,1056

1000*0,1056=105 adet

Tamir etme süresi 113 dk. ile 125 dk. arasında olanların oranını bulunuz.

P(60<X<100)= P($\frac{113-120}{4}$ < X < $\frac{125-120}{4}$)

= P(-1,75 < X < 1,25)=0,4599+0,3944=0,8543

b) Tamir etme süresi 113 dk. ile 125 dk. arasında olanların oranını bulunuz.

P(60<X<100)= P($\frac{113-120}{4}$ < Z < $\frac{125-120}{4}$)

= P(-1,75 < Z < 1,25)=0,4599+0,3944=0,8543

c) Eğer servis 125dk. nın üzerinde servis veriliyor ise; o ay servise ceza kesilmektedir. Servisin 1 yıl içinde ceza kesilme sayısının en az 5 olması olasılığı nedir?

Y:12 ayda kesilen ceza sayısı
$Y \sim$ Binom (0,1056;12)
$P(Y \geq 5) = 1 - P(Y \leq 4) = P(Y=0)+...+P(Y=4)$

BİNOM-NORMAL DAĞILIM YAKLAŞIMI

$\mu = np$
$\sigma^2 = npq$
olmak üzere
$Z = \frac{x-np}{\sqrt{npq}}$

$n \longrightarrow \infty$ ve p 0 veya 1'e yakın ise;
veya
$n \longrightarrow$ küçük
p=0,5 yakın ise,

ÖRNEK:

Bir hastalıktan iyileşme oranı 0,4'dür.100 kişinin bu hastalığa yakalandığı bilindiğinde 30 kişiden daha azının hayatta kalma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

X: hastalığa yakalanan 100 kişiden iyileşenlerin sayısı

X ~ Binom (100;0,4)

P(X< 30) = $\sum \binom{100}{x} (0{,}4)^{x} (0{,}60)^{100-x}$

veya

ÇÖZÜM:

μ=np=100*0,4=40

X ~ (40; $4{,}899^2$)

σ = $\sqrt{npq}$ = $\sqrt{100(0{,}4)(0{,}6)}$ = 4,899

P(X<30) = P($\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{30-40}{4{,}899}$)

= P(Z<-2,04)=0,0207=%2,1

MERKEZİ LİMİT TEOREMİ

x_1 , x_2 ,...., x_n aynı dağılıma sahip ve istatiksel olarak bağımsız rassal değişkenler olsun. Bunların aritmetik ortalaması B[X_i] = μ_i ve varyansı V(X_i)= $\sigma_i{}^2$ ile gösterilsin.

Y= x_1 + x_2 +...+ x_n ile oluşan rassal değişken olsun.

$$Z= \frac{x-\mu}{\sigma} \quad ; z = \frac{Y-\sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i{}^2}}$$

n $\longrightarrow$ yeterince büyük olduğunda, Y'nin dağılımı normal dağılıma yaklaşır. Z dönüşümü yapıldığında; Y ~ N(0,1) olur.

Bu teoremin özel bir durumu örnek ortalamaları ile ilgilidir.

x_1 , x_2 ,...., x_n aynı dağılıma sahip ,bağımsız, ardışık rassal değişkenler olsun. Ortalaması B[X_i] = μ ve V(X_i) = σ^2 olsun. Aynı ana kütleden alınan n birimlik örneklerin aritmetik ortalamaları $\overline{x_i}$ iken;

$\bar{X}$ ~ N(μ, $\frac{\sigma^2}{n}$) olur.

Merkezi limit teoremi gereğince, ana kütlenin dağılımı ne olursa olsun, örnekteki birim sayısı n yeterince artırıldığında, örnek ortalamalarının dağılımı normla dağılıma yaklaşır.

Normal Dağılımın Yeniden Üretilebilirlik Özelliği

x_1 , x_2 ,...., x_n n adet normal, bağımsız dağılmış rassal değişken olsun.

$x_i \sim (\mu_i , {\sigma_i}^2)$ i= 1,2,...,n

Y= $x_1 + x_2 + ... + x_n$

B[Y]=$\mu_Y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$

V(Y)= ${\sigma_Y}^2 = \sum_{i=1}^{n} {\sigma_i}^2$ olur.

Y=$a_0 + a_1 x_1 + ... + a_n x_n$

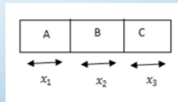
$\mu_Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$

${\sigma_Y}^2 = \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 {\sigma_i}^2$

Y~ $(\mu_Y , {\sigma_Y}^2)$

ÖRNEK:

Bir parça 3 adet alt parçadan şekilde görüldüğü gibi oluşmaktadır.



$x_1 \sim$ N(12;0,02)

$x_2 \sim$ N(24;0,03)

$x_3 \sim$ N(18;0,04)

Toplam parça uzunluğunun 53,8 ile 54,2 cm arasında çıkması olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

Y= x_1 +x_2 +x_3

μ_Y = 12+24+18=54

$\sigma^2 = {\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2 + {\sigma_3}^2$

= 0,02+0,03+0,04=0,09

P(53,8 $\leq$ Y $\leq$ 54,2)

=P($\frac{53,8-54}{0,3} \leq Z \leq \frac{54,2-54}{0,3}$)

= P(-0,67 $\leq$ Z $\leq$ 0,67)

=0,498

ÖRNEK:

5000 küçük parça birlikte paketlenerek ağırlığı 250 gr. olan büyük bir paket elde edilecektir. Küçük parçaların ağırlıkları ortalaması 0,5 gr. ,standart sapması 0,10 gr.'dır. Büyük paketin ağırlığının 2510 gr.'ı geçmesi olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

Y= x_1 +x_2 + ...+ x_{5000}

μ_Y = 5000*0,5=2500

$\sigma_Y{}^2$ = 5000(0,01)=50

σ_Y =7,071

P(Y ≥ 2510)= P(Z> $\frac{2510-2500}{7,071}$)

= P(Z > 1,41)

= 0,07929

ÖRNEK:

Bir inşaat projesinde temel faaliyetler aşağıdaki gibi verilmiş ve faaliyetler biri bitmeden diğeri başlayamaz şeklinde sıralı olarak projelendirilmiştir.

	Ortalama	Varyans
1. İş	2,7 hafta	1,0
2. İş	5,2 hafta	2,1
3. İş	7,1 hafta	1,9

ÖRNEK:

Y: işin tamamlanma süresi

Y= x_1 +x_2 +x_3

μ_Y = 2,7+5,2+7,1=15 hafta

$\sigma_Y{}^2$ = 1+2,1+1,9= 5 hafta

% 90 olasılıkla bu iş en fazla kaç haftada tamamlanır?

ÇÖZÜM:

$P(Y \leq Y_0) = 0,90$

$P(Z \leq \frac{Y_0 - 15}{2,236}) = 0,90$

$Y_0 = 17,87$ hafta