ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

İST 213 OLASILIK DERSİ

SÜREKLİ DAĞILIMLAR-1

DOÇ. DR. NİHAL ERGİNEL

2015

SÜREKLİ DÜZGÜN DAĞILIM

X rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \; ; a \leq x \leq b \\ 0 \; ; dd \end{cases}$$

şeklinde ise **x'e düzgün dağılmış rassal değişken**, **f(x) ' e sürekli düzgün dağılım** denir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \; ; a \leq x \leq b \\ 0 \; ; dd \end{cases}$$

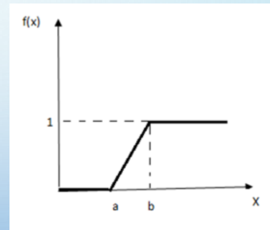
a <b ve b-a >0 olduğuna göre , f(x) >0 olur. **(1)**

$\int_a^b \frac{1}{b-a} . d_x = 1$ **(2)**

(1) ve **(2)** özellik sağlanmaktadır.

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} \, . \, d_t = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \, ; x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \, ; a \leq x < b \\ 1 \, ; x \geq b \end{cases}$$



Ortalama:

$$\mu = \int_a^b \frac{x}{b-a} \, . \, d_x = \frac{a+b}{2}$$

Varyans:

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

ÖRNEK:

X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20} \, ; 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \, ; dd \end{cases}$$

Dağılım fonksiyonu , ortalama ve varyansını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$F(x) = \begin{cases} 0\,;\, x < 0 \\ \frac{x}{20}\quad ;\, 0 \le x < 20 \\ 1\,;\, x \ge 20 \end{cases}$$

$$\mu = \frac{a+b}{2} = 20/2 = 10$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(20)^2}{12} = 33{,}3$$

GAMMA DAĞILIMI

X > 0 , α >0 , β > 0 olmak üzere x sürekli rassal değişken olsun.

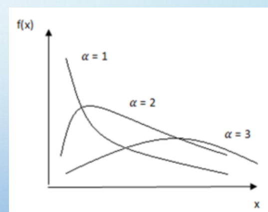
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}.x^{\alpha-1}.e^{-\beta x} & ;x \ge 0 \\ 0\ ;x < 0 \end{cases}$$

f(x) fonksiyonuna gamma dağılımı denir.

Burada ;

$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}.e^{-\beta x}.dx$

gamma α fonksiyonunu verir.



α ve β' ya göre farklılık gösterir.

ÖZELLİKLERİ

1) α >1 iken $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1).\Gamma(\alpha-1)$

2) $\alpha \ge 2$ iken $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1).\Gamma(\alpha-1)$

$=(\alpha-1).\ (\alpha-2).\Gamma(\alpha-2)$

$=(\alpha-1).\ (\alpha-2)\ldots\Gamma(1)$ ise;

$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!\,.\,\Gamma(1)$

ÖZELLİKLERİ

3) α =1 iken $\boldsymbol{\Gamma}(\alpha)$ =$\boldsymbol{\Gamma}(1)$ = 0! = 1'dir.

$\boldsymbol{\Gamma}(\alpha)$ = $(\alpha-1)$! Olur.

GAMMA DAĞILIMININ ARİTMETİK ORTALAMASI

μ = $\frac{\alpha}{\beta}$

σ^2 = $\frac{\alpha}{\beta^2}$

$M(t)_x$ = $\frac{\beta^\alpha}{\tau(\alpha)} \int_0^\infty e^{tx}.x^{\alpha-1}.e^{-\beta x}.dx$

$M(t)_x$ = $\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$; t< β

α = 1 iken üstel dağılım olur.

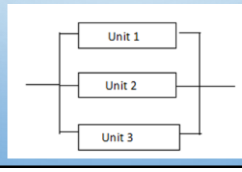
$f(x)$ = $\frac{\beta^\alpha}{\boldsymbol{\Gamma}(\alpha)}.x^{\alpha-1}.e^{-\beta x}$, x ≥ 0

$f(x)$ = β . $e^{-\beta x}$, x ≥ 0 (üstel dağılım)

Üstel dağılım gamma fonksiyonunun özel bir türüdür.

ÖRNEK:

Bir geçici sistem şekilde görüldüğü gibi birbirine bağlanmıştır. Başlangıçta 1. ünite çalışır konumda, diğer üniteler standby konumundadır. 1. bozulduğunda 2. ünite, o da bozulursa 3. ünite devreye girmektedir. Sistem x = $x_1 + x_2 + x_3$ şeklinde ifade edilmektedir. Sistemlerin birbirinden bağımsız çalışması durumunda, her bir sistem ortalaması 100 saat olacak şekilde çalışacaktır.



ÖRNEK:

Buna göre;

a) Sistemin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.
b) Sistemin en az χ saat çalışması fonksiyonunu bulunuz.
c) Sistemin en az 300 saat çalışması olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM: a) Eğer sistemler birbirinden bağımsız çalışsalardı;

α = 1 için;

μ = 100 saat

$\beta = \frac{1}{100} = 0{,}01$

x_j : j. ünitenin ortalama çalışma süresi

$x_j \sim$ exp(0,01)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} \cdot e^{-0{,}01x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$

ÇÖZÜM: a) Burada 3 sistem olduğuna göre;

α = 3 için;

$\beta = \frac{1}{100}$ = 0,01

f(x) = $\begin{cases} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}.x^{\alpha-1}.e^{-\beta x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$

f(x) = $\begin{cases} \frac{0{,}01^{3}}{\Gamma(\alpha)}.x^{2}.e^{-0{,}01x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$

$\boldsymbol{\Gamma}(3) = (3-1)!$ =2

ÇÖZÜM:

b) Sistemin en az X saat çalışması durumu

P(X $\geq$ x) = 1- P(X< x) = 1- F(x) = R(x) (reliability function)

Belirli bir zaman aralığında k adet bağımsız sistemin çalışması;

Poisson Dağılımı:

R(x) = $\sum_{k=0}^{r-1} e^{-0{,}01x} \frac{(0{,}01x)^{k}}{k!}$

= $e^{-0{,}01x}$. [1+(0,01x)+ $\frac{(0{,}01x)^{2}}{2}$]

c) Sistemin en az 300 saat çalışma olasılığı

P(X $\geq$ 300) = $e^{-0{,}01.(300)}$. [1+(0,01.300)+$\frac{(0{,}01.300)^{2}}{2}$]

= 0,4232

ÜSTEL DAĞILIM

X rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu λ >0 olmak üzere;

f(x) = $\begin{cases} \lambda.e^{-\lambda x}; x \geq 0 \\ 0 ; dd \end{cases}$

f(x) ' e üstel dağılım denir.

$$F(x) = \int_0^{x} \lambda . e^{-\lambda t} . dt = 1- e^{-\lambda t}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \ ; x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} \ ; x \geq 0 \\ 1 \ ; x \to \infty \end{cases}$$

$\mu = B[X] = \frac{1}{\lambda}$

$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

Değişim katsayısı (DK)= $\frac{\mu}{\sigma}$

$M(t)_x = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, $t < \lambda$

ÖRNEK:

Parametresi λ = 2 olan üstel dağılmış x rassal değişkenine ait aşağıdaki olasılıkları hesaplayınız.

a) $P(X \leq 2)$
b) $P(2 \leq X \leq 4)$
c) $P(X \leq 4 / X > 2)$

ÇÖZÜM:

a) $P(X \leq 2) = \int_0^2 \lambda . e^{-2x} . dx = F(2) - F(0)$

$= 1 - e^{-2.2} = 0{,}9817$

b) $P(2 \leq X \leq 4) = F(4) - F(2)$

$= 1 - e^{-2.4} - (1 - e^{-2.2})$

$= 0{,}01798$

c) $P(X \leq 4 / X > 2) = \frac{P(2 < X \leq 4)}{P(X > 2)}$

$= \frac{0{,}01798}{1 - 0{,}9817} = 0{,}9825$

ÖRNEK:

Bir süpermarkette kasada hizmet verme süresi ortalaması 40 sn. olarak tespit edilmiştir.

a. Hizmet verme süresi 1 dk.'dan az olanların oranını bulunuz.
b. Hizmet verme süresinin 1 dk.'dan fazla olduğu bilindiğinde 2 dk'dan az olanların oranını bulunuz.

ÇÖZÜM:

X: hizmet verme süresi (dk.)

μ = 40 sn. = 0,667 dk.

$\lambda = \frac{1}{\mu} = 1{,}5$ dk.

$$P(X) = f(x) = \begin{cases} 1{,}5 . e^{-1{,}5x} ; x \geq 0 \\ 0 ; dd \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 ; x < 0 \\ 1 - e^{-1{,}5t} ; x \geq 0 \\ 1 ; x \to \infty \end{cases}$$

ÇÖZÜM: a) $P(X \leq 1) = F(1) - F(10)$

$= 1 - e^{-1,5} - (1 - e^{0}) = 0,7768$

b) $P(X<2 \,/\, X>1) = \frac{P(1<X<2)}{P(X>1)}$

$= \frac{F(2)-F(1)}{1-F(1)}$

$= \frac{-e^{-3}+e^{-1,5}}{e^{-1,5}} = 0,7769$

ÖRNEK:

Bir elektriksel parçanın kullanım ömrünün yani, hata olana kadar geçen sürenin ortalama 10^5 saat olmak üzere üstel dağıldığı bilinmektedir. Bu tür elektriksel parçanın ömründen önce bozulanların oranını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$\mu = 10^5$ saat

$\lambda = \frac{1}{\mu} = 10^{-5}$

$X \sim$ üstel (10^{-5})

X: hata olana kadar geçen süre

$f(x) = 10^{-5} . e^{-10^{-5}x}$, $x \geq 0$

$P(X < 10^5) = F(x) = 1 - e^{-10^{-5}.10^5} = 0,6312$

Parçaların %63'ü 10^5 saatten önce bozulabilir.

POİSSON VE ÜSTEL DAĞILIM ARASINDAKİ İLİŞKİ

X: belirli bir zaman aralığında ilgili olayın ortaya çıkma sayısı iken;

X ~ Poisson(λ)

x_t : Başlangıçtan t anına kadar geçen sürede ilgilenilen olayın ortaya çıkma sayısı olarak tanımlanırsa;

x_t ~ Poisson (λt)

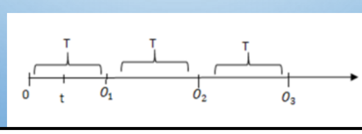
P(x) = $\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$ x=0,1,2,... şeklinde olur.

T: poisson dağılmış bir rassal değişkenin biri diğerini izleyen iki olay arasındaki süre olarak tanımlanırsa T'nin dağılım fonksiyonu:

P(T≤ t) = F(t) olup

P(T> t) = 1- F(t) 'dir.

P(T>t) : Biri diğerini izleyen iki olay arasında geçen sürenin (t) 'den büyük olması demek, bu arada ilgili olayın hiç ortaya çıkmaması , yani P(X=0) olması demektir.



P(T>t) = P(X=0) = $\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!}$ = $e^{-\lambda t}$ = 1- F(t)

F(t) = 1- $e^{-\lambda t}$ (üstel dağılımın dağılım fonksiyonu)

f(t) = λ.$e^{-\lambda t}$, t ≥ 0 üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu olur.

Görüldüğü gibi x, ortalaması λt olan bir poisson dağılmış rassal değişken iken, "gelişlerarası süre" olarak tanımlanan T rassal değişkenin dağılımı üstel dağılım olur.

ÖRNEK:

Bir petrol istasyonuna her 15 dakikada ortalama 3 müşteri gelmektedir. Bu petrol istasyonuna gelen müşteriler arası geçen sürenin dağılımı nedir?

ÇÖZÜM:

X: 15 dk. içinde gelen müşteri sayısı

λ =3 müşteri/15 dk. = 0,2 müşteri/ dk.

X ~ Poisson(λ)

P(x) = $\frac{e^{-0,2}(0,2)^x}{x!}$

μ= $\frac{1}{\lambda}$ = $\frac{1}{0,2}$ = 5 dk/müşteri

ÇÖZÜM:

T: müşteriler arası geçen süre iken T ~Üstel

Müşteriler arası geçen sürenin dağılımı;

f(t) = 0,2$e^{-0,2t}$, t ≥ 0 olur.

F(t) = 1- $e^{-0,2t}$

- Müşteriler arası geçen sürenin 8 dk. veya daha fazla çıkması olasılığı nedir?

  P(T≥8) = 1 – P(T<8) = 1- F(8) = 1- (1-$e^{-0,2.8}$) = 0,20

ÖRNEK:

Bir hamburgerciye öğle saatlerinde her 5 dakikada ortalama 4 müşterinin kuyruğa girdiği bilinmektedir.

a-) Kuyruğa girenler arasında geçen sürenin olasılık yoğunluk fonksiyonunu ve dağılım fonksiyonunu belirleyiniz.

b-) 5 dk. içerisinde hiç müşteri gelmeme olasılığını bulunuz.

c-) Birbirini izleyen 2 müşteri arasında en fazla 2 dk. geçme olasılığını bulunuz.

d-) İki müşteri arasında geçen sürenin 3 dk. veya daha fazla olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM:

X: 1 dk. da geçen müşteri sayısı

λ=$\frac{4}{5}$ = 0,8 müşteri / dk.

P(X) = $\frac{e^{-0,8}(0,8)^x}{x!}$; x: 0,1,2... iken

a) T: iki müşteri arasında geçen süre(dk.)

f(t) = $\begin{cases} 0,8.e^{-0,8x}; x \geq 0 \\ 0 ; dd \end{cases}$

F(x) = $\begin{cases} 0 \ ; x < 0 \\ 1 - \ e^{-0,8t} \ ; x \geq 0 \\ 1 \ ; x \to \infty \end{cases}$

ÇÖZÜM:

b) X: 5 dk. içerisinde gelen müşteri sayısı

λ= 4 müşteri/ 5 dk.

P(x) = $\frac{e^{-4}(4)^x}{x!}$ iken

P(X=0)= $\frac{e^{-4}(4)^0}{0!}$ = 0,0183

ÇÖZÜM:

c) T: iki müşteri arasında geçen süre (dk)

P(T$\leq$ 2) = $\int_0^2 0{,}8.e^{-0{,}8t}\,dt$

= F(2)= 1- $e^{-0{,}8.2}$

= 0,7981

d) P(T $\geq$ 3) = 1 –P(T<3)

= 1- F(3)= 1-(1-$e^{-0{,}8.3}$)

=0,0907

ÖRNEK:

Bir kafeteryada müşterilere hizmet verme süresi ortalaması 4 dk. dır. Bu kişinin 6 gün içinde en az 4 gününde 3 dk. dan az bir sürede hizmet verme olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM:

T: hizmet için geçen süre

μ=4 dk

λ=$\frac{1}{4}$

f(t) = $\begin{cases} 0{,}25.e^{-0{,}25t}; t \geq 0 \\ 0 \quad\quad ; \quad dd \end{cases}$

P(T<3) = F(3) = 1-$e^{-0{,}25.3}$ = 0,47

ÇÖZÜM:

X: 6 gün içinde 3 dk.dan az bir sürede hizmet görülen gün sayısı

X ~ B(0,47;6)

p= 0,47 , n=6

P(X≥ 4) = P(X=4)+ P(X=5)+ P(X=6)

$= \binom{6}{4}0{,}47^4 0{,}53^2 + \binom{6}{5}0{,}47^5 0{,}53^1 + \binom{6}{6}0{,}47^6 0{,}53^0$

= 0,40

ÖRNEK:

Belirli bir parça için hatalar arası geçen sürenin ortalaması 5 yıldır. Eğer bu parçalardan 5 tanesi farklı bir sisteme kurulmuş olsaydı, 8. Yılın sonunda en az 2 tanesinin hala çalışıyor olması olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM:

T: hatalar arası süre

μ=4

$\lambda=\frac{1}{5}$

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}2.e^{-0{,}2t}; t \geq 0 \\ 0 \,; dd \end{cases}$$

Verilen bir parçanın 8 yıl sonunda hala çalışıyor olması olasılığı

P(X>8) = 1- F(t)= 1-(1-$e^{-0{,}2.8}$) = 0,2

ÇÖZÜM:

X: 8 yıl sonra da çalışan parça sayısı

$X \sim B(0,2;5)$

p= 0,2 , n=5

$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$= 1 - \binom{5}{0} 0{,}2^0 0{,}8^5 - \binom{5}{1} 0{,}2^1 0{,}8^4$

$= 0{,}263$