ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

İST 213 OLASILIK DERSİ

KESİKLİ DAĞILIMLAR-2

DOÇ. DR. NİHAL ERGİNEL

2015

GEOMETRİK DAĞILIM

Bir Bernoulli deneyi ilk olumlu sonuç elde edilmesine kadar tekrarlansın.

X: ilk olumlu sonucun elde edilmesine kadar yapılan deneme sayısı iken;

$$p(x) = \begin{cases} p.(1-p)^{x-1}; x = 1,2,.. \\ 0 \,; dd \end{cases}$$

$$\mu = \frac{1}{p} \qquad \sigma^2 = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

ÖRNEK:

Bir hastalığa yakalanma olasılığı 0,05’dir.Bu hastalığa yakalanan kişiler tespit edilmek istenmiştir. Seçilen 5. Kişinin, bu hastalığa yakalanan ilk kişi çıkma olasılığı nedir? p=0,05

ÇÖZÜM:

X: hastalığa yakalanan ilk kişi bulunana kadar seçilen kişi sayısı

P(X=5)= p.$(1-p)^{x-1}$

= $(0,05)(1-0,05)^{5-1}$

= 0,041

ÖRNEK:

Bir imalat sürecinde hatalı üretim oranı % 8’dir. Bu süreçten rasgele seçilen 10. Parçanın hatalı olan ilk parça çıkma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

X: hatalı parça ortaya çıkana kadar seçilen parça sayısı

X ~ Geometrik dağılım (0,08)

p(x) = (0,08) $(0,92)^{x-1}$ x=1,2,...,10

P(X= 10) = (0,08) $(0,92)^{10-1}$ = 0,038

ÖRNEK:

Belirli bir deney başarılı sonuç elde edilene kadar tekrarlanıyor. Bu deneyler birbirinden bağımsız ve deneyin yapılmam maliyeti 25.000 \$. Eğer deney başarısız olursa; bir sonraki deney için hazırlık maliyeti 5000\$. Deneyin başarılı sonuç elde etme olasılığı 0,25'dir.

ÇÖZÜM:

a) Deney yapan kişi için projenin beklenen maliyetini tahmin ediniz.

X: başarılı deneyin elde edilmesine kadar yapılan deney sayısı ise;

X ~ Geometrik dağılım (0,25)

$\mu = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,25} = 4$

Maliyet fonksiyonu;

C(X) = 25000.x + (5000) (x-1) = 30000.x -5000

B[C(X)] = 30000 B[X] – 5000

$= 30000\left(\frac{1}{p}\right) - 5000 = 115000\$$

ÇÖZÜM:

b) Deney yapan kişi bu deney için en fazla 500000\$ harcayabilmektedir. Başarılı sonuç elde edemeden harcama olasılığı nedir?

P[C(X)] > 500000 = p(30000.x -5000>500000)

$= P(X > \frac{505000}{30000}) = P(X>16,833)$

$= 1 - P(X \leq 16) = 1 - \sum_{x=1}^{16}(0,25)(0,75)^{x-1}$

= 0,01

PASCAL VE NEGATİF BİNOM DAĞILIMI

Bir Bernoulli deneyi verilen bir sayıda ilgilenilen sonuç elde edilinceye kadar tekrarlansın.

X: verilen r sayıda istenen sonuç elde edilinceye kadar yapılacak deney sayısı

P(X) = $C_{x-1}^{r-1}\ (p)^r(1-p)^{x-r}$ x= r,r+1.....

μ= $\frac{r}{p}$, σ^2 = $\frac{rq}{p^2}$

ÖRNEK:

Bir yol kavşağına gelen araçların %20 'si ilgilenilen yöne, diğerlerinin karşı yöne gittikleri bilinmektedir. Başlangıçtan itibaren 30. Aracın ilgilenilen yöne giden 12. araç çıkma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM:

X: ilgilenilen yöne giden 12. araç ortaya çıkana kadar kavşağa gelen araç sayısı

$$p(x) = \begin{cases} C_{30-1}^{x-1}\ (0,20)^x(0,80)^{30-x}; \text{x=12,13,...} \\ \quad 0 \quad ; \quad d.d. \end{cases}$$

P(X=12)= $C_{30-1}^{12-1}\ (0,20)^{12}(0,80)^{30-12}$

=0,00255

POİSSON DAĞILIMI

ÖZELLİKLERİ

- Sistem, zamanın anlamlı dilimlerinde ya da belirli bir alanın alt kesimlerine göre incelendiğinde kullanılır.
- Bu alt dilimlerde, birbirini izleyen olayların bağımsız olduğu varsayılır.
- Tanımlanan aralıkta olayın bir defa ortaya çıkma olasılığı değişmemektedir.

X: ilgilenilen olayın ortaya çıkma sayısı iken ;
λ> 0 olmak üzere;

$$p(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} & ; x = 0,1,2,\dots,\infty \\ 0 \; ; dd & \end{cases}$$

Fonksiyonuna poisson dağılımı denir. Parametresi λ 'dır.

POİSSON DAĞILIMININ ARİTMETİK ORTALAMASI VE VARYANSI

$\mu = B[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} = \lambda$

$\sigma^2 = \lambda$

Moment çıkartan fonksiyonu:

$M_x(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$

ÖRNEK:

Bir laboratuvarda yapılan deneyde 1 milisaniyede geçen radyoaktif partikül sayısı ortalaması 4 ‘tür. Belirlenen 1 milisaniyede 6 partikül geçme olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

X: 1 milisaniyede geçen partikül sayısı

λ = 4 partikül / 1 milisaniye

$$p(x) = \begin{cases} \frac{e^{-4}.4^{x}}{x!} & ; x = 0,1,2,\ldots,\infty \\ 0\ ; dd & \end{cases}$$

$$P(X=6) = \frac{e^{-4}.4^{6}}{6!} = 0,104$$

ÇÖZÜM:

Belirlenen 1 milisaniyede 6 veya daha fazla partikül geçme olasılığını bulunuz.

$P(X \geq 6) = 1- P(X<6) = 1- 0,7851 = 0,2149$

ÖRNEK:

Bir markete saatte ortalama 2 müşteri geldiği ve bunların Poisson dağıldığı bilinmektedir.

a) Markete saatte 3 müşteri gelmesi olasılığını bulunuz.
b) Markete saatte en fazla 2 müşteri gelmesi olasılığını bulunuz.
c) Markete saatte birden fazla müşteri geldiği bilindiğinde, müşteri sayısının 2 ile 3 arasında olması olasılığı nedir?

ÖRNEK-Devam:

d) Markete gelen müşterilerin %60 'ının alışveriş yaptığı bilinmektedir. Markete gelen 6. Müşterinin alışveriş yapan ilk müşteri çıkması olasılığı nedir?
e) Markete gelen 10. müşterinin alışveriş yapan 3. müşteri çıkması olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

X: Markete 1 saatte gelen müşteri sayısı

X ~ Poisson(2)
λ = 2 müşteri / saat
μ = 2 müşteri/ saat

$$p(x) = \begin{cases} \frac{e^{-2}.2^{x}}{x!} & ; x = 0,1,2,\ldots,\infty \\ 0 ; dd \end{cases}$$

a) $P(X=3) = \frac{e^{-2}.2^{3}}{3!} = 0{,}18$

ÇÖZÜM:

b) $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$$= \frac{e^{-2}.2^0}{0!} + \frac{e^{-2}.2^1}{1!} + \frac{e^{-2}.2^2}{2!} = 0{,}135 + 0{,}271 + 0{,}271 = 0{,}677$$

c) $P(2 \leq X \leq 3 \,/\, X>1) = \frac{P(2 \leq X \leq 3)}{P(X>1)} = \frac{P(X=2)+P(X=3)}{1-[P(X=0)+P(X=1)]} = 0{,}76$

ÇÖZÜM:

d) X: ilk alışveriş yapan müşteri gelene kadar gelen müşteri sayısı

$X \sim$ Geometrik (0,60)

$$p(x) = \begin{cases} (0{,}60)(0{,}40)^{x-1}; & x = 1,2,.. \\ 0\,; dd \end{cases}$$

$P(X=6) = (0{,}60)(0{,}40)^{6-1} = 0{,}00614$

e) X: alışveriş yapan müşteri gelene kadar geçen müşteri sayısı r=3 (negatif binom)

$p(x) = C_{x-1}^{3-1}\ (0{,}6)^3(1-0{,}6)^{x-3}$ x= 3,4,.....

$P(X=10) = \binom{10-1}{3-1}.(0{,}6)^3(1-0{,}6)^7 = 0{,}0127$

ÖRNEK:

Bir işyerine haftada 5 işgününde, iş istemek için başvuran sayısı ortalaması 1,5 kişidir. Aylık 22 işgünü olduğu düşünülürse, ilgili işyerine ayda iş için başvuran kişi sayısının 3'den fazla olması olasılığı nedir?

λ = 1,5 kişi / 5 gün

X: ayda iş için başvuran kişi sayısı

$\lambda = \frac{22 \times 1{,}5}{5} = 6{,}6$ kişi / 22 gün

ÇÖZÜM:

$$P(X) = \begin{cases} \frac{e^{-6,6}.6,6^x}{x!} & ; x = 0,1,2,\ldots,\infty \\ 0 \; ; dd \end{cases}$$

$$P(X>3) = 1- P(X<3) = 1- \sum_{x=0}^{3} \frac{e^{-6,6}.6,6^x}{x!} = 0,895$$

BİNOM VE POİSSON ARASINDAKİ İLİŞKİ

X binom dağılmış bir rassal değişken iken , np sabit kalmak üzere, deney sayısı yeterince artırıldığında p yeterince küçülecektir.

Bu durumda

$p(X) = \binom{n}{x}.(p)^x(1-p)^{n-x}$, x= 0,1,...

$\lim_{\infty} \binom{n}{x}.(p)^x(1-p)^{n-x}$; λ = np olmak üzere,

$p(x) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$ olur.

Genel olarak p < 0,10 olması istenir.

ÖRNEK:

Yeni tasarlanan bir uçak parçasında kusurlu oranı 0,001'dir. 4000 adet parçadan 6 ve daha fazla kusurlu çıkması olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM:

X: 4000 adet parçadan kusurlu olanların sayısı iken

X ~ Binom(4000; 0,001)

p(x) = $\binom{4000}{x}.(0{,}001)^x(1-0{,}001)^{4000-x}$, x= 0,1,...

olması gerekirken,

λ = np = 4000*0,001 = 4 adet   X ~Poisson (4)

P(X ≥ 6) = 1- P(X<6) = 1-$\sum_{x=0}^{5}\frac{e^{-4}.4^x}{x!}$ = 1- 0,7851 = 0,2149

ÖRNEK:

Bir mağaza sahibi, yaptığı incelemede mağazasına saatte ortalama 4,5 müşteri geldiğini tespit etmiştir. 2 saatlik periyotta en az 12 müşterinin mağazaya gelme olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM:

μ = 4,5 müşteri/ saat

μ_1 = 9 müşteri / 2 saat

$$p(X) = \begin{cases} \frac{e^{-9}.9^x}{x!} & ; x = 0,1,2,\ldots,\infty \\ 0 ; dd & \end{cases}$$

P(X ≥ 12) = 1- P(X<12) = 1-0,803 = 0,197 (kümülatif binom tablosu)

ÖRNEK:

Bir toplulukta belirli bir hastalığa yakalanma olasılığı 0,01'dir.Rassal olarak seçilen 200 kişiden en az 4 kişinin bu hastalığa yakalanma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

n=200

p = 0,01

X: 200 kişiden hastalığa yakalananların sayısı

X ~ binom (200;0,01)

P(X) $=\binom{200}{x}.(0{,}01)^x(1-0{,}01)^{200-x}$, x= 0,1,...

VEYA

ÇÖZÜM:

λ =np = 200*0,01 = 2 oldukça küçük (<5)

X ~ Poisson (2)

$$p(x)=\begin{cases}\frac{e^{-2}.2^x}{x!} & ;x=0,1,2,\dots,\infty\\ 0\,;dd\end{cases}$$

P(X ≥ 4) = 1- P(X<4)

$$= 1-\left[\frac{e^{-2}.2^0}{0!}+\frac{e^{-2}.2^1}{1!}+\frac{e^{-2}.2^2}{2!}+\frac{e^{-2}.2^3}{3!}\right] = 0{,}1428$$

ÖRNEK:

Az rastlanılan bir kan hastalığına yakalanan hastaların iyileşme oranı 0,4'tür.Hastanede tedavi gören 15 hastanın;

a) En az 10 tanesinin iyileşme olasılığı nedir?

b) İyileşen hasta sayısının 3 ile 8 arasında olma olasılığı nedir?

c) Tam olarak 5 kişinin iyileşme olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

a) X: hastalığa yakalanan 15 kişiden iyileşenlerin sayısı

$X \sim$ Binom (15;0,4)

p(x) $=\binom{15}{x}.(0,4)^{x}(1-0,4)^{15-x}$, x= 0,1,...

P(X$\geq$ 10) = P(X=10)+ P(X=11))+ P(X=12) + P(X=13))+ P(X=14)

$=\binom{15}{10}.(0,4)^{10}(1-0,4)^{15-10}+......+\binom{15}{14}(0,4)^{14}(1-0,4)^{15-14}$

= 0,0338

ÇÖZÜM:

VEYA

= 1- P(X<10) = 1- P(X $\leq$ 9) = 1- 0,9662 = 0,0338

b) P(3 $\leq$ X $\leq$ 8) = P(X=3) +...+ P(X=8) veya

= F(8) – F(3)

= 0,9050-0,0271=0,8779

c) P(X=5) = $\binom{15}{5}.(0,4)^{5}(1-0,4)^{15-5}$

= 0,1859

ÖRNEK:

Bir uyarı lambası üreticisi imalat süreci %1 kusurlu üretim yapmaktadır. Bu oranın değişmediği varsayılırsa, rassal olarak seçilen 100 birimlik örneğin kusurlu oranının %3 'ten az çıkma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM: n =100

p=0,01

X ~ Binom (100;0,01)

X: 100 örnekteki kusurlu birim sayısı

$$P(X) = \begin{cases} \binom{100}{x}(p^x)(1-p)^{100-x}; & x = 0,1,2,.. \\ 0\,; dd \end{cases}$$

P(X ≤ 3) = P(X=0)+ P(X=1)+ P(X=2)+ P(X=3)

$= \binom{100}{0}(p^0)(1-p)^{100-0}$+........+ $\binom{100}{3}(p^3)(1-p)^{100-3}$

=0,98

ÇÖZÜM: VEYA

Binom – poisson

λ =np = 100*0,01 = 1 oldukça küçük (<5)

X ~ Poisson (2)

$$p(x) = \begin{cases} \frac{e^{-1}.1^x}{x!} & ; x = 0,1,2,\ldots,\infty \\ 0 & ; \quad dd \end{cases}$$

$P(X \leq 3) = \frac{e^{-1}.1^0}{0!} + \frac{e^{-1}.1^1}{1!} + \frac{e^{-1}.1^2}{2!} + \frac{e^{-1}.1^3}{3!}$ = 0,9810