ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

İST 213 OLASILIK DERSİ

KESİKLİ DAĞILIMLAR-1

DOÇ. DR. NİHAL ERGİNEL

2015

KESİKLİ DÜZGÜN DAĞILIM

Eğer X kesikli rassal değişkeninin alabileceği değerler (x_1,x_2,........,x_k) eşit olasılığa sahip ise , kesikli düzgün dağılım söz konusudur.

p(x) = $\frac{1}{k}$, X= x_1,x_2,........,x_k şeklinde gösterilir.

ÖRNEK:

Bir kutuda sarı, kırmızı, mavi, beyaz toplardan birer adet bulunmaktadır. Rassal olarak seçilen bir topun kırmızı çıkma olasılığı nedir?

X: sarı, kırmızı, mavi, beyaz

p(X=kırmızı) = $\frac{1}{4}$

KESİKLİ DÜZGÜN DAĞILIM

Ortalaması: $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} X_i}{k}$

Varyansı: $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(X_i - \mu)^2}{k}$

ÖRNEK:

Bir tavla zarının atılışının fonksiyonunu yazınız. Ortalama ve varyansını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & ;\ x = 1,2,3,..6 \\ 0 & ;dd \end{cases}$$

Ortalaması: $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5$

$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \mu)^2}{k} = \frac{(1-3{,}5)^2 + \dots + (6-3{,}5)^2}{6} = 35/12$

BERNOULLİ DAĞILIMI

Aynı koşullar altında tekrarlanan bir rassal deney sonucu

- olumlu/olumsuz,
- geçerli/geçersiz,
- başarılı/başarısız,
- hatalı/hatasız gibi iki çıktı veriyor iken;

BERNOULLİ DAĞILIMI

Olumlu: 1

Olumsuz:0 olmak üzere;

p : bir deneyin olumlu sonuçlanma olasılığı iken;

$$p(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x}; x = 0,1 \\ 0 ; \ dd \end{cases}$$

BERNOULLİ DAĞILIMI

Ortalama: $\mu = B[X] = \sum_{i=0}^{1} x.p^x(1-p)^{1-x} = p$

Varyans : $\sigma^2 = B[X^2] - \mu^2 = p - p^2 = p(1-p)$

$B[X^2] = \sum_{i=0}^{1} x^2.p^x(1-p)^{1-x} = p$

ÖRNEK:

Bir rassal değişkenin olasılık fonksiyonu;

p(x) = $\begin{cases} (0,1)^x (0,9)^{1-x}; x = 0,1 \\ 0\,;\ \ dd \end{cases}$

şeklinde verilmiştir. Ortalama ve varyansını bulunuz.

ÇÖZÜM:

Ortalama: µ = B[X] =p =0,1

Varyans : σ^2 = p(1-p) = (0,1)(0,9) = 0,09

BİNOM DAĞILIMI

Bernoulli deneyinin aynı koşullar altında n defa tekrarlandığında karşılaşılan olumlu sonuç sayısı ile ilgilenirse binom dağılımı söz konusudur.

Binom Dağılımı Özellikleri

1-) Rassal deneyler aynı koşullar altında **n defa** tekrarlanmıştır.

2-) Her deney için olumlu/olumsuz gibi 2 sonuç vardır.

3-) Olumlu sonuç elde etme olasılığı **p**, olumsuz sonuç elde etme olasılığı **1-p'**dir.

4-) Her deneyin biri diğerinden bağımsızdır.

X: n deneyde karşılaşılan olumlu sonuç sayısı

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}; x = 0,1,\ldots\ldots,n \\ 0\,;\ dd \end{cases}$$

p(x) fonksiyonuna binom dağılımı, X'e **binom dağılmış rassal değişken** denir.

Binom Dağılımı Aritmetik Ortalama ve Varyansı

$$\mu = B[X] = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} x . p^x (1-p)^{n-x} = np$$

$$V(X) = B[X^2] - \mu^2$$
$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} x^2 . p^x (1-p)^{n-x} - (np)^2$$
$$= np(1-p)$$

ÖRNEK:

Bir elektrik parçanın şok testine dayanma olasılığı $\frac{3}{4}$ 'tür.

a)Denenen 4 parçadan 2 tanesinin bu teste dayanma olasılığını bulunuz.

b) Denenen 4 parçadan en az 2 tanesinin bu teste dayanma olasılığını bulunuz.

c) Denenen 4 parçadan teste dayananların ortalama ve varyansını bulunuz.

ÇÖZÜM:

a)

X:4 parçadan teste dayananların sayısı (n=4)

p=0,75

p(x) = $\begin{cases} \binom{4}{x}(0{,}75)^x(1-0{,}75)^{4-x}; x = 0,1,\ldots\ldots,4 \\ 0\,;\ dd \end{cases}$

P(X=2) = $\binom{4}{2}(0{,}75)^2(1-0{,}75)^{4-2}$ = 0,21

ÇÖZÜM:

b)

P(X ≥ 2) = P(X=2) + P(X=3) +P(X=4)

= 0,21 + $\binom{4}{3}(0{,}75)^3(1-0{,}75)^{4-3}$ + $\binom{4}{4}(0{,}75)^4(1-0{,}75)^{4-4}$

= 0,21+ 0,42+0,32

= 0,95

c)

μ = B[X] = np = 4*0,75= 3

V(X) =np(1-p) = 4*(0,75)*(0,25)= 0,75

ÖRNEK:

Bir hastanın riskli bir kalp ameliyatı sonrası iyileşme olasılığı %90'dır. İzleyen 7 hastanın 5 tanesinin bu ameliyat sonrası iyileşme olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

X: 7 hastadan ameliyat sonrası iyileşenlerin sayısı

p=0,9

$$p(x) = \begin{cases} \binom{7}{x}(0{,}9)^x(1-0{,}9)^{7-x}; & x = 0,1,\ldots..,7 \\ 0\,; & dd \end{cases}$$

$P(X=5) = \binom{7}{5}(0{,}9)^5(1-0{,}9)^{7-5}$ = 0,124

ÖRNEK:

İnsanların "antideprasanların gerçekte hiçbir şeyi iyileştirmediği " düşüncesinde olma olasılığı %70 'dir.

a)5 kişiden en az 3 kişinin bu fikre katılma olasılığını bulunuz.

b) izleyen 5 kişi dikkate alındığında antideprasanların bir iyileştirme sağlamadığına inanan ortalama kişi sayısını ve varyansı bulunuz.

ÇÖZÜM:

a) X: 5 kişiden ilgili düşüncede olan kişi sayısı

p(x) = $\begin{cases} \binom{5}{x}(0,7)^x(1-0,7)^{5-x}; x = 0,1,\ldots\ldots,5 \\ 0\,;\ dd \end{cases}$

P(X≥3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)

= $\binom{5}{3}(0,7)^3(1-0,7)^{5-3}$ +$\binom{5}{4}(0,7)^4(1-0,7)^{5-4}$ +$\binom{5}{5}(0,7)^5(1-0,7)^{5-5}$

= 0,3087+0,36+0,16 = 0,83

ÇÖZÜM:

b)

µ = B[X] = np = 5*0,7= 3,5

V(X) =np(1-p) = 5*(0,7)*(0,3)= 1,05

ÇOKLU DENEYLER

k adet mümkün durum söz konusu ve her bir durumun ortaya çıkma olasılıkları p_1, p_2 ,..., p_k olsun.

n deneyde x_1 rassal değişkenin ortaya çıkması , x_2 rassal değişkenin ortaya çıkması,.......,x_k rassal değişkenin ortaya çıkması sayısı bunların kombinasyonu şeklinde olur.

ÇOKLU DENEYLER

$\binom{n}{x_1, x_2, \ldots, x_k} = \frac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_k!}$ ise

$x_1, x_2, \ldots, x_k$ rassal değişkenin olasılık fonksiyonu;

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \begin{cases} \binom{n}{x_1, x_2, \ldots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k} \;; \sum_{i=1}^{k} x_i = n \\ 0 \;; dd \end{cases}$$

olur.

ÖRNEK:

9 kişi bir toplantıya katılmak için uçak, otobüs, otomobil ve tren seçeneklerini sırasıyla %40, %20,%30 ve %10 oranlarıyla tercih etmektedir. Buna göre bu 9 kişiden 3'ünün uçağı, 3'ünün otobüsü, 1 kişinin otomobili, 2 kişinin treni tercih etme olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_4) = \begin{cases} \binom{9}{3\;3\;1\;2} (0{,}4)^3\, (0{,}2)^2 (0{,}3)^1 (0{,}1)^2 \;; \sum_{i=1}^{k} x_i = n \\ 0 \;; dd \end{cases}$$

$P(x_1, x_2, \ldots, x_4)$ = 0,00774

x_1 : kişinin uçağı tercih etme sayısı

x_2 : kişinin otobüsü tercih etme sayısı

x_3 : kişinin arabayı tercih etme sayısı

x_4 : kişinin treni tercih etme sayısı

ÖRNEK:

Bir ürün kalitesine göre 4 şekilde nitelendirilmektedir. 1 .derece, 2. Derece, 3. Derece ve hurda. 1. Derece ürün üretme olasılığı %60, 2. Derece ürün üretme olasılığı %30 , 3. Derece ürün üretme olasılığı % 8 ve hurda olasılığı %2'dir.Buna göre 20 birimlik örnek alındığında bunun 10 tanesinin 1. Derece, 5 tanesinin 2. Derece, 3 tanesinin 3. Derece ve 2 tanesinin hurda çıkma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

P($x_1, x_2, \ldots, x_4$) = $\begin{cases} \binom{20}{10\ 5\ 3\ 2}(0,6)^{10}\,(0,3)^5(0,08)^3(0,02)^2 \ ; \ \sum_{i=1}^{k} x_i = n \\ 0 \ ; dd \end{cases}$

P($x_1, x_2, \ldots, x_4$) = 0,0014

x_1 : 20 birimden 1. Derece olan ürün sayısı

x_2 : 20 birimden 2. Derece olan ürün sayısı

x_3 : 20 birimden 3. Derece olan ürün sayısı

x_4 : 20 birimden hurda olan ürün sayısı

ÖRNEK:

A,B,C kişileri hedefi vurma denemeleri yapmaktadır.

A kişisi hedefi $\frac{1}{8}$ olasılıkla vurmaktadır ve 3 deneme yapmıştır.

B kişisi hedefi $\frac{1}{4}$ olasılıkla vurmaktadır ve 5 deneme yapmıştır.

C kişisi hedefi $\frac{1}{2}$ olasılıkla vurmaktadır ve 2 deneme yapmıştır.

a)Hedefin kaç kere vurulması beklenmektedir?

b) Hedefi vurmanın varyansı nedir?

ÇÖZÜM:

a) $B[X_A]$ = np= $3*\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$B[X_B]$ = np= $5*\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$B[X_C]$ = np= $2*\frac{1}{2} = 1$

$B[X] = B[X_A] + B[X_B] + B[X_C]$

$= \frac{3}{8} + \frac{5}{4} + 1 = 2{,}625$

ÇÖZÜM:

b) $V[X_A]$ = np(1-p)= $3.\frac{1}{8}.\frac{7}{8} = \frac{21}{64}$

$V[X_B]$ = np(1-p)= $5.\frac{1}{4}.\frac{3}{4} = \frac{15}{16}$

$V[X_C]$ = np(1-p)= $2.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$V[X] = V[X_A] + V[X_B] + V[X_C]$

$= \frac{21}{64} + \frac{15}{16} + \frac{1}{2} = 1{,}77$

HİPERGEOMETRİK DAĞILIM

Örnek uzayı ikili ayrım yapılabilecek şekilde yine gözlem/deney sonucu

- hatalı/hatasız,
- başarılı/başarısız gibi ikili sonuç elde edilir. Örnekleme geri konulmadan yapılması durumunda,

X: topluluktan çekilen n birim içindeki ilgilenilen birim sayısı iken,

X~ hipergeometrik dağılım

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{N}{x}\binom{M}{n-x}}{\binom{N+M}{n}} \; ; & x=0,1,2,\ldots,N \ (n > N) \\ & x=0,1,\ldots,n \ (n \leq N) \\ 0 \; ; \; dd & \end{cases}$$

N: örnek uzayında ilgilenilen türdeki birim sayısı

M: örnek uzayındaki diğer ilgilenilen türdeki birim sayısı

n: örnek sayısı

ÖRNEK:

İçinde 10 adet üçgen 5 adet kare oyuncak bulunan torbadan 3 adet oyuncak geri konmaksızın çekiliyor. 3 tanesinde üçgen çıkma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

X:3 birim içindeki üçgen oyuncak sayısı

N:10

M:5

$$P(X) = \begin{cases} \dfrac{\binom{10}{x}\binom{5}{3-x}}{\binom{15}{3}} \; ; & x=0,1,2,3 \\ 0 \; ; \; dd & \end{cases}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{10}{3}\binom{5}{3-3}}{\binom{15}{3}} = 0,26$$

ÖRNEK-Devam:

2 tanesinin üçgen 1 tanesinin kare olma olasılığı nedir?

P(X=2) = $\frac{\binom{10}{2}\binom{5}{3-2}}{\binom{15}{3}}$ = 0,49

En az 2 tanesinin üçgen olma olasılığı nedir?

P(X≥ 2) = P(X=2)+ P(X=3) = 0,26 +0,49 = 0,75

HİPERGEOMETRİK DAĞILIMIN ARİTMETİK ORTALAMASI / VARYANSI

$$\mu = B[X] = \sum_{x=0}^{N} \frac{\binom{N}{x}\binom{M}{n-X}}{\binom{N+M}{n}} = \frac{N}{M+N}.\ n$$

$$\sigma^2 = \frac{N}{N+M} \cdot \frac{M}{M+N} \cdot n. \frac{M+N-n}{M+N-1}$$

ÖRNEK:

10 mermiden rasgele 4 tanesi seçiliyor ve ateşleniyor.10 mermiden 3'ünün hatalı olduğu bilinmektedir. Bu durumda;

a-) ateşlenen mermilerden hiçi hatalı mermi çıkmama olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

a)

X: hatasız mermi sayısı

N:7
M:3
n :4

$$P(X) = \begin{cases} \dfrac{\binom{7}{x}\binom{3}{4-x}}{\binom{10}{4}} & ; \quad x=0,1,2,3,4 \\ 0 & ; \text{ dd} \end{cases}$$

$$P(X=4) = \frac{\binom{7}{4}\binom{3}{0}}{\binom{10}{4}} = 0,1667$$

ÇÖZÜM:

b) En fazla 2 tanesinin hatalı çıkması olasılığı nedir?

$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$$= \frac{\binom{7}{2}\binom{3}{2}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{7}{3}\binom{3}{1}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{7}{4}\binom{3}{0}}{\binom{10}{4}} = 0,9667$$

ÇÖZÜM:

c) Seçilen 4 mermi içinde beklenen hatalı mermi sayısı nedir?

$B[X] = \mu = \frac{N.n}{M+N} = \frac{7.4}{10} = 2,8$ (beklenen hatasız mermi sayısı)

4-2,8 = 1,2 beklenen hatalı mermi sayısı

HİPERGEOMETRİK VE BİNOM DAĞILIMI ARASINDAKİ İLİŞKİ

Hipergeometrik dağılımda $\frac{N}{M+N}$ oranı yeterince küçük ise (N+M:büyük bir anakütle) 0,10'dan küçük ise binom dağılımı kullanılabilir.

$\frac{N}{M+N} < 0,10$

ÖRNEK:

Bir partide 200 birimden 8'i kusurludur. Rassal olarak geri konulmaksızın seçilen 10 birimden 1 tanesinin kusurlu çıkma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM:

X: 10 birim içindeki kusurlu birim sayısı

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\binom{8}{x}\binom{192}{8-x}}{\binom{200}{8}} & ; \quad x=0,1,2,..,10 \\ 0 & ; \text{dd} \end{cases}$$

$$P(X=1) = \frac{(1)\binom{192}{9}}{\binom{200}{10}}$$

ÇÖZÜM:

Hipergeometrik $\longrightarrow$ Binom

$\frac{n}{N} = \frac{10}{200}$ = 0,05 < 0,1 yeterince küçük olduğundan;

x ~ Binom dağılır (n,p)

n= 10

p = $\frac{8}{200}$ = 0,04

P(X=1) = $\binom{10}{1}.\,(0{,}04)^1.\,(0{,}96)^9$ = 0,28