ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

İST 213 OLASILIK DERSİ

BEKLENEN DEĞER VE MOMENTLER

DOÇ. DR. NİHAL ERGİNEL

2015

BEKLENEN DEĞER

X beklenen değeri B[X] ile gösterilir.

$$B[X] = \begin{cases} \sum x.p(x); & x - kesikli \\ \int xf(x)\,dx; & x - sürekli \end{cases}$$

ÖRNEK

Belli bir malzeme taşınan kolilerin ağırlıkları ve olasılık fonksiyonları aşağıdaki gibidir. Kolilerin beklenen ortalama ağırlıkları ne kadardır?

Sınıflar	x_i	p(x)
$5 \leq x < 10$	7	1/2
$10 \leq x < 15$	12	1/4
$15 \leq x < 20$	17	3/16
$20 \leq x < 25$	22	1/16

ÇÖZÜM

X: koli ağırlığı

B[X] = $\sum_{i=1}^{4} xp(x)$

$= 7.\frac{1}{2} + 12.\frac{1}{4} + 17.\frac{3}{16} + 22.\frac{1}{16}$

$= \frac{177}{16} = 11{,}0625$

ÖRNEK

Bir elektronik devrenin kullanım ömrünün fonksiyonu;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20000}{x^3} & ; \quad x > 100 \\ 0 & ; \quad dd \end{cases}$$

gibidir. Ortalama beklenen kullanım ömrünü bulunuz.

ÇÖZÜM

x: kullanım ömrü (saat)

B[X] = $\int_{100}^{\infty} x.\frac{20.000}{x^3}.dx$

$= \int_{100}^{\infty} \frac{20.000}{x^2}.dx = \left(\frac{20.000}{(-1)} x^{-1}\right)_{100}^{\infty}$

$= 0 + \frac{20.000}{(100)} = 200$ saat

BEKLENEN DEĞER İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

1) u(x) , x rassal değişkeninin bir fonksiyonu ise;

$$B[u(x)] = \begin{cases} \sum u(x).p(x) \quad x; kesikli \\ \int u(x).p(x).dx \quad x; sürekli \end{cases}$$

2) k; sabit bir sayı iken

B[k]=k

BEKLENEN DEĞER İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

3) k sabit bir sayı, u(x) x rassal değişkeninin bir fonksiyonu iken

B[k.u(x)]=k.B[u(x)]

4) u(x) ve v(x) x rassal değişkeninin iki fonksiyonu, a ve b sabit sabit sayılar iken,

B[a.u(x) + b.v(x)]=a.B[u(x)] + b.B[v(x)] olur veya

B[ax + b]= a.B[X] + b

BEKLENEN DEĞER İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

5) X rassal değişkeninin beklenen değeri, ana kütle ortalama değerine eşittir. B[X]=μ şeklinde gösterilir.

B[X]=μ iken B[X-μ] = B[X]-μ= 0 olur.

VARYANS

$$V(X) = \begin{cases} \sum(x-\mu)^2 . p(x); & x - kesikli \\ \int(x-\mu)^2 . f(x)\, dx; & x - sürekli \end{cases}$$

V(X) = B[$(x-\mu)^2$] = B[x^2- 2xμ+μ^2]

= B[x^2- 2μ^2+μ^2] = B[x^2- μ^2]

= B[x^2]- μ^2

$$V(X) = \begin{cases} [\sum(x)^2 . p(x)] - \mu^2; & x - kesikli \\ [\int(x)^2 . f(x)\, dx] - \mu^2; & x - sürekli \end{cases}$$

VARYANSIN ÖZELLİKLERİ

k sabit bir sayı iken;

1-) V(X+k) = V(X)

2-) V(k.X) = k^2 .V(X)

3-) Varyansın pozitif kareköküne standart sapma denir.

σ^2 = V(X) = B[$(x-\mu)^2$] = B[X^2]- μ^2

ÖRNEK

x rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}; & -1 < x < 2 \\ 0\ ; & dd \end{cases}$$

olarak verilmiştir. B[4x+3] değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{3}; & -1 < x < 2 \\ 0; & dd \end{cases}$$

$$B[4X+3] = \int_{-1}^{2}(4x+3)\frac{x^2}{3}.dx=$$

$$= 8$$

ÖRNEK

X rassal değişkeni bir üretim sürecindeki kusurlu parça sayısını göstermektedir. Kusurlu sayıları ve bunların olasılıkları aşağıda verilmiştir.

X	0	1	2	3
P(X)	0,51	0,38	0,10	0,01

a) Ortalama kusurlu parça sayısını bulunuz.
b) Kusurlu sayısının varyansını bulunuz.

ÇÖZÜM

μ= $\sum xp(x)$ = 0(0,51) + 1(0,38)+ 2.(0,10)+3(0,01) = 0,61

σ^2 = V(X) = B[$(x-\mu)^2$] = B[X^2]- μ^2

B[X^2] = $\sum x^2 p(x)$ = 0.(0,5)+1(0,38)+4.(0,10)+9(0,01)= 0,87

σ^2 = B[x^2]- μ^2 = 0,87 - $0,61^2$= 0,4979

ÖRNEK

Bir ürünün haftalık talebinin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x)=\begin{cases} 2(x-1); & 1 < x < 2 \\ 0\,; & dd \end{cases}$$

ortalama ve varyansını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\mu = B[X] = \int_1^2 x(2x-1)\,dx = \frac{5}{3}$$

$$\sigma^2 = B[X^2] - \mu^2$$

$$B[X^2] = \int_1^2 x^2(2x-1)\,dx = \frac{17}{6}$$

$$\sigma^2 = B[X^2] - \mu^2 = \frac{17}{6} - \frac{5}{3}^2 = \frac{1}{18}$$

ÖRNEK

$f(x) = \frac{3}{8}(x^2+1)$; $-1 \leq x \leq 1$

olasılık yoğunluk fonksiyonunun dağılım fonksiyonu, ortalama ve varyansını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\int_{-1}^{x} \frac{3}{8}\,(t^2+1)\,dt = \frac{1}{8}(x^3+3x+4)$

- Dağılım fonksiyonu

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ; x < -1 \\ \frac{1}{8}\,(x^3+3x+4); & -1 \le x \le 1 \\ 1 & ; x \ge 1 \end{cases}$$

ÇÖZÜM

- Ortalama

$\mu = B[X] = \int_{-1}^{1} x\,\frac{3}{8}(x^2+1)\,dx = 0$

- Standart sapma

$B[X^2] = \int_{1}^{2} x^2.\frac{3}{8}(x^2+1)\,dx = \frac{2}{5}$

$\sigma^2 = B[X^2] - \mu^2 = \frac{2}{5}$

$\sigma = 0{,}632$

MOMENTLER

Moment: a gerçel bir sayı iken, $B[(x-a)^r]$ 'ne x rassal değişkeninin a civarındaki r. momenti denir.

$$B[(x-a)^r] = \begin{cases} \sum (x-a)^r.p(x)\,; x - kesikli \\ \int (x-a)^r.f(x).dx\ \ ; x - sürekli \end{cases}$$

Şeklinde gösterilir.

$B[(x-a)^r]$: x rassal değişkeninin aritmetik ortalama civarındaki r. momentidir. (μ_r şeklinde gösterilir.)

ÖRNEĞİN:

μ_2 = B[$(x-\mu)^2$] = σ^2 varyans , x rassal değişkeninin aritmetik ortalama civarındaki 2. momentidir.

a = 0 olursa x rassal değişkeninin sıfır civarındaki r. momentleri elde edilir.

B[$(x)^r$] = μ_r' şeklinde gösterilir.

X rassal değişkeninin sıfır civarındaki 2. momenti B[x^2] = μ_2' kareli ortalamadır.

$$B[X^2] = \begin{cases} \sum (x)^2 . p(x) \,; x - kesikli \\ \int (x)^2 . f(x) . dx \;\; ; x - sürekli \end{cases}$$

- Standart sapmanın ortalamaya oranına değişim katsayısı denir.

  Değişim katsayısı: DK = $\frac{\sigma}{\mu}$
- X rassal değişkeninin aritmetik ortalamaya göre 3. momentinin σ^3 ' e oranına çarpıklık ölçüsü denir.

  $\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$
- X rassal değişkeninin aritmetik ortalamaya göre 4. momentinin σ^4 ' e oranına basıklık ölçüsü denir.

  $\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$

MOMENTLER ARASI İLİŞKİLER

Momentleri aritmetik ortalamaya göre hesaplamak zaman alıcıdır. Bu yüzden sıfır civarındaki momentleri arasındaki ilişkilerle tarif edilir.
Aritmetik ortalamaya göre r. moment;
$B[(X - \mu)^r] = \mu_r$

Sıfır civarındaki r. moment;

$B[(X)^r] = \mu_r'$ iken,

r= 1 ise $\mu_1 = \mu_1' - \mu = 0$ ($\mu_1' = B[X'] = B[X] = \mu$ olduğu için)

r=2 ise $\mu_2 = \mu_2' - 2\mu\mu_1' + \mu^2 = \mu_2' - \mu^2 = B[X^2] - \mu^2$ (aritmetik ortalama civarındaki 2. moment varyans $B[X^2] - \mu^2$)

r=3 ise,

$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 3\mu^2 \mu_1' - \mu^3 = \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 3\mu^3 - \mu^3$

$= \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3$

r= 4 ise ,

$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu\mu_3' + 6\mu^2 \mu_2' - 4\mu^3\mu_1' + \mu^4$

$= \mu_4' - 4\mu\mu_3' + 6\mu^2 \mu_2' - 3\mu^3$

Yani;

$\mu_r = \sum_{i=0}^{r}(-1)^r.\binom{r}{i}.\mu^i.\mu_{r-i}{}^r$

ÖRNEK

f(x) = $\begin{cases} \frac{2}{9}x & ; 0 < x < 3 \\ 0 & ; \quad dd \end{cases}$

X- sürekli rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu verilmiştir.

a) X rassal değişkenin dağılım fonksiyonunu belirleyiniz.

b) Ortalama ve varyansını bulunuz.

c) Çarpıklık ölçüsünü bulunuz.

d)Basıklık ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM

a) F(x) = $\int_{-\infty}^{x} \frac{2}{9}t \,; 0 < x < 3$ = $\frac{x^2}{9}$

F(x) = $\begin{cases} 0\,, x < 0 \\ \frac{x^2}{9}\,, 0 < x < 3 \\ 1\,; x \geq 3 \end{cases}$

b) B[X] = $\int_0^3 x f(x)\, dx$ = $\int_0^3 \frac{2x^2}{9} dx$ = 2

$\mu_2{}'$ = V(x) = $\int_0^3 x^2 \; \frac{2x}{9} \; dx$ - μ^2 = 4,5-4=0,5

ÇÖZÜM

c) $\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$

$\mu_2{}'$ = B[x^2] = 0,5

$\mu_3{}'$ = B[x^3] = $\int_0^3 x^3 \; \frac{2x}{9} \; dx$ = $\frac{54}{5}$

μ_3 = $\mu_3{}'$ -3$\mu\mu_2{}'$ +2 μ^3 = $\frac{54}{5}$ -3.2(0,5)+2.2^3= $\frac{119}{5}$

$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ = $\frac{\frac{119}{5}}{0,5^{3/2}}$ = 67,32

ÇÖZÜM

$d)\ \mu_4{}' = B[x^4] = \int_0^3 x^4 \frac{2x}{9} dx = 27$

$\mu_4 = \mu_4{}' - 4\mu\mu_3{}' + 6\,\mu^2\,\mu_2{}' - 3\mu^3 = 27 - 4.2.\frac{54}{5} + 6.2^2.\frac{9}{5} - 3.2^4 = 108{,}6$

$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{108{,}6}{0{,}5^2} = 434{,}4$

ÖRNEK

X rassal değişkenin olasılık fonksiyonu;

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & ; \quad x = 1,2,3 \\ 0 & ; \quad dd \end{cases}$$

şeklinde verilmiştir. Aritmetik ortalama, varyans, standart sapma, değişim katsayısı, çarpıklık ve basıklık ölçülerini bulunuz.

ÇÖZÜM

- $\mu_1 = B[X] = \sum_{i=1}^{3} \frac{x^2}{6} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} = \frac{14}{6}$
- $V(X) = B[(x-\mu)^2]$

$= B[x^2] - \mu^2; \quad \mu_2 = \mu_2{}' - \mu^2$

$\mu_2{}' = B[x^2] = \sum_{i=1}^{3} \frac{x^3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{8}{6} + \frac{27}{6} = \frac{36}{6} = 6$

$\mu_2 = \mu_2{}' - \mu^2 = 6 - \frac{49}{9} = \frac{5}{9}$

ÇÖZÜM

- $\sigma = \sqrt{V(X)}$ = 0,745
- $\mu_3' = B[x^3] = \sum_{i=1}^{3} \frac{x^4}{6} = \frac{49}{3}$

$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu\mu_2' + 2\mu^3$

$= \frac{49}{3} - 3.\frac{7}{3}.6 + 2.\frac{7^3}{3} = -\frac{7}{27}$

$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\frac{-7}{27}}{0{,}745^3}$

= -0,627

ÇÖZÜM

- $\mu_4' = B[x^4] = \sum_{i=1}^{3} \frac{x^5}{6} = 46$

$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu\mu_3' + 6\mu^2\mu_2' - 3\mu^3$

$= 46 - 4.\frac{7}{3}.\frac{49}{3} + 6.\frac{7^2}{3}.6 + 3.\frac{7^4}{3} = \frac{17}{27}$

$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\frac{17}{27}}{0{,}745^2}$

= 2,0439

MOMENT ÇIKARTAN FONKSİYON

h>0 ve |t|< h için $B[e^{tx}]$ ' e x rassal değişkenin moment çıkartan fonksiyonu denir.

$$\mu_x(t) = B[e^{tx}] = \begin{cases} \sum e^{tx}.p(x); x - kesikli \\ \int e^{tx}.f(x)\,dx\,; x - sürekli \end{cases}$$

e^{tx} serisi;

e^{tx} = 1+ t.x + $\frac{t^2.x^2}{2!}$ + ...+ $\frac{t^r.x^r}{r!}$

μ_x(t) = B[e^{tx}] = 1+B[x].t + B[x^2].$\frac{t^2}{2}$ + ...+ B[x^r].$\frac{t^r}{r!}$

μ_x(t) =1+ $\mu_1{}'$.t + $\mu_2{}'$. $\frac{t^2}{2}$ + ... + $\mu_r{}'$. $\frac{t^r}{r!}$

$\mu_r{}'$ = sıfır civarındaki r. momenti

ÖRNEK:

μ_x(t) = B[e^{tx}] = $\sum_{x=1}^{3} e^{tx}\,\frac{x}{6}$

= $e^t.\frac{1}{6} + e^{2t}.\frac{2}{6}\,e^{3t}.\frac{3}{6}$

Moment çıkartan fonksiyonun t'ye göre r. türevini alırsak t civarındaki r. momentini bulmuş oluruz.

ÖRNEK-devam:

$$\frac{\partial\ \mu_x(t)}{dt^r} = \mu_x(t)^{\ r} = \begin{cases} \sum x^r.e^{tx}.p(x); x - kesikli \\ \int x^r.e^{tx}.f(x)\,dx\ ; x - sürekli \end{cases}$$

t = 0 koyarsak, sıfır civarındaki r. momentini bulmuş oluruz.

$$\mu_x(t)^{\ 0} = \begin{cases} \sum x^r.p(x); x - kesikli \\ \int x^r.f(x)\,dx\ ; x - sürekli \end{cases}$$

Elde edilir. Parametrelerin tahmininde kullanılabilir.

ÖRNEK:

X rassal değişkenin olasılık fonksiyonu;

P(x) = $\binom{n}{x} .p^x .q^{n-x}$; x≥ 0

Şeklindedir. Moment çıkaran fonksiyon yardımı ile aritmetik ortalama ve varyansını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\mu_x(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} . p^x . q^{n-x}$

$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} . (p.e^t)^x . q^{n-x}$

İki terimlinin binom açılımından;

$\mu_x(t) = (p.e^t + q)^n$

$\frac{\partial\ \mu_x(t)}{\partial t}$ = n.$(p.e^t + q)^{n-1}. p.e^t$

$\frac{\partial^2\ \mu_x(t)}{\partial t^2}$ = np[e^t(n-1) $(p.e^t + q)^{n-2}. pe^t$ + $(p.e^t + q)^{n-1}$ .e^t]

ÇÖZÜM

t= 0 olduğunda;

$\mu_1{}'$ = np (sıfır civarındaki 1. momenti)

$\mu_2{}'$ = np [(n-1)p+1]

$\mu = \mu_1{}'$ = np

$\sigma^2 = \mu_2{}' - \mu^2$ = np[(n-1)p+1] - $(np)^2$

σ^2 = np(1-p) =npq

ÖRNEK:

f(x)=λ.$e^{-\lambda x}$; x≥0

fonksiyonunun aritmetik ortalaması ve varyansı nedir?

ÇÖZÜM

- Aritmetik Ortalama

μ = B[x] = $\int_0^{\infty} x.\lambda.e^{-\lambda x}.dx$

= uv - $\int v.du$

= x. - $\frac{1}{x}e^{-\lambda x}$ + $\int_0^{\infty}(\frac{1}{\lambda}.\lambda.e^{-\lambda x}.dx)$.λ

= 0+0+$\frac{1}{\lambda}$ = $\frac{1}{\lambda}$

$e^{-\lambda x}.dx = dv$

- $\frac{1}{x}e^{-\lambda x}$ = v

u =x , du= dx

ÇÖZÜM

- Standart sapma

σ^2 = B[x^2]- μ^2

B[x^2]= $\int_0^{\propto} x^2\,\lambda.e^{-\lambda x}.dx$ = $\frac{2}{\lambda^2}$

σ^2 = B[x^2]- μ^2

= $\frac{2}{\lambda^2}$ - $\frac{1}{\lambda^2}$

= $\frac{1}{\lambda}$