ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

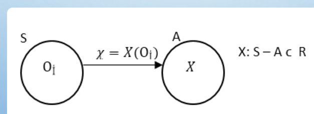
İST 213 OLASILIK DERSİ

TEK BOYUTLU RASSAL DEĞİŞKENLER

DOÇ. DR. NİHAL ERGİNEL

TEK BOYUTLU RASSAL DEĞİŞKENLER

Rassal değişken: S örnek uzayının her bir basit olayını yalnız bir gerçel değere dönüştüren fonksiyonuna **rassal (tesadüfi) değişken** denir.



ÖRNEK:

İki para birlikte atıldığında üste gelen yüzlerin örnek uzayı nedir?

S= {(T,T) (T,Y) (Y,T) (Y,Y)}

x: üste gelen tura sayısı ise;

X(T,T) = 2

X(T,Y) = 1

X(Y,T) = 1

X(Y,Y) = 0

ÖRNEK-Devam:

Farklı rassal değişken tanımlamak mümkündür. Örneğin

x: üste gelen yazı sayısı ise;

X(T,T) = 0

X(T,Y) = 1

X(Y,T) = 1

X(Y,Y) = 2 olacaktır.

Kesikli Rassal Değişken: X rassal değişkeninin R'deki değer kümesi olan A sayılabilir veya sayılabilir olarak sonsuz bir küme ise x'e kesikli (süreksiz rassal) değişken denir.

A = $\{x_i \mid i = 1,2,\ldots\}$

Sürekli Rassal Değişken: X rassal değişkeninin R'deki değer kümesi A, sayılmaz küme ise, x'e sürekli rassal değişken denir.

A = $\{x \mid a \leq X \leq b\}$

Bir fonksiyon olarak tanımlanan rassal değişken ile, rassal sistemde karşılaşılabilir tüm durumlar gerçek sayılara dönüştürülmüş , böylece bu sistem ile ilgili olayların olasılıkları , karşı gelen rassal değişkenler ile gösterilmiştir.

Önemli olan konu bu rassal değişkene bağlı matematiksel modelin geliştirilmesidir. Rassal değişkenlerin bir fonksiyonu olan bu matematiksel modeller olasılık / olasılık yoğunluk fonksiyonları olarak adlandırılmaktadır.

KESİKLİ RASSAL DEĞİŞKENİN OLASILIK FONKSİYONU

x: kesikli rassal değişken

p(x) : x rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu iken,

1) x_i örnek uzayında bir olaya karşı geldiğine göre;

$0 \leq P(O_j) \leq 1 \qquad \forall X_i \in A$ dır.

2) x rassal değişken X(S) = A dönüşümü gerçekleştirilip

P(S) = 1 olduğundan, ayrık olayların toplam özelliğine göre

$P(X(A)) = \sum_{X_i \in A} p(x_i) = 1$ dir.

ÖRNEK:

x : kesikli rassal değişken,

$$p(x) = \begin{cases} \left(\frac{3}{5}\right)^{x} \left(\frac{2}{5}\right)^{1-x} & ; x = 0,1 \\ 0 & ; dd \end{cases}$$

Bu durumda p(x) olasılık fonksiyonu mudur?

ÇÖZÜM:

1.Kural için;

$P(X=0) = \left(\frac{3}{5}\right)^{0} \left(\frac{2}{5}\right)^{1-0} = \frac{2}{5} \longrightarrow 0 \leq \frac{2}{5} \leq 1$

$P(X=1) = \left(\frac{3}{5}\right)^{1} \left(\frac{2}{5}\right)^{1-1} = \frac{3}{5} \longrightarrow 0 \leq \frac{3}{5} \leq 1$

2.Kural için;

$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$

Sonuç:1. ve 2. Koşullar sağlandığı için p(x) bir olasılık fonksiyonudur.

OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONU

X: sürekli rassal değişken

A: sürekli rassal değişkenin değer kümesi

X ∉ A için f(x) = 0 olmak üzere;

A_i = (a,b] ⊂ A için, her A_i ⊂ A için;

P{x∈ A_i } = $\int_a^b f(x)\, d_x$ özeliğini gerçekleyen f(x) ' e **x'in olasılık yoğunluk fonksiyonu** denir.

OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONU ÖZELLİKLERİ:

1) Verilen fonksiyon matematiksel olarak x ∈ R için bir değer alabilir. Ancak tanım gereği x∉ A için f(x) = 0 olarak ele alınır.
2) ∀ x ∈ A için f(x) ≥ 0 olarak ele alınır.
3) P(x ∈ A)= $\int f(x) d_x$= 1 olmalıdır.
4) ∀ (a,b] ⊂ A için ∀ (a< x ≤ b) =$\int_a^b f(x)\, d_x$ olmak üzere, A üzerinde f(x) süreklidir.

ÖRNEK:

X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 2x \;; & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \;; & dd \end{cases}$$

a) Bu bir olasılık yoğunluk fonksiyonu mudur?

b) P($\frac{1}{2}$ < X ≤ 1) = ?

c) P(X ≤ $\frac{3}{4}$) =?

ÇÖZÜM:

a) A = {x | 0 ≤ x ≤ 1} ∀ x ∈ A için f(x) ≥ 0 olur.

$\int_0^1 2x\,dx = x^2$ = 1 olduğundan f(x) bir olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

b) $P(\frac{1}{2} < X \leq 1) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2x\,dx = x^2 \,|_{1/2}^{1} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

c) $P(X \leq \frac{3}{4}) = \int_{-\infty}^{\frac{3}{4}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{\cancel{f(x)}}_{0}\,dx + \int_{0}^{\frac{3}{4}} f(x)\,dx = \frac{9}{16}$

ÖRNEK:

Bir rassal deneye ait örnek uzayı {a,b,c,d,e,f} ve her bir rassal deney sonucu eşit olasılıkla ortaya çıkmaktadır. Rassal değişkenler aşağıdaki gibi tariflenmiştir.

X rassal değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.

Çıktı	a	b	c	d	e	f
X	0	0	1,5	1,5	2	3

ÇÖZÜM:

6 adet rassal deney söz konusudur.

$P(0) = \frac{2}{6}$

$P(1,5) = \frac{2}{6}$

$P(2) = \frac{1}{6}$

$P(3) = \frac{1}{6}$

ÖRNEK:

Bir rassal değişken ve ona ait olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir. Buna göre,

a) $P(X \leq 2)$

b) $P(X > -2)$

c) $P(-1 \leq X \leq 1)$ değerlerini bulunuz.

X	-2	-1	0	1	2
P(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

ÇÖZÜM:

a) $P(X \leq 2) = P(X=-2) + P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1$

b) $P(X > -2) = P(-1 \leq x \leq 2) = \frac{7}{8}$

c) $P(-1 \leq X \leq 1) = P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1)$

$= \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$

ÖRNEK:

$p(x) = \frac{2x+1}{k}$; $x = 0,1,2,3,4$

a) p(x) fonksiyonunun bir olasılık fonksiyonu olabilmesi için k ne olmalıdır?

b) $P(X=4)$,

c) $P(X \leq 1)$,

d) $P(2 \leq X < 4)$,

e) $P(X > -10)$ değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

a) $\frac{1}{k}$.(2.0+ 1+2.1+1+2.2+1+2.3+1+2.4+1) = 1

k =25

b) P(X) =$\frac{2x+1}{25}$

P(X=4)= $\frac{9}{25}$

ÇÖZÜM:

c) P(X $\leq$ 1)= P(X=0)+ P(X=1)

$= \frac{1}{25} + \frac{3}{25} = \frac{4}{25}$

d) P(2$\leq$ X < 4)= P(X=2)+ P(X=3)

$= \frac{5}{25} + \frac{7}{25} = \frac{12}{25}$

e)P(X > -10) = 1

ÖRNEK:

X rassal değişkeninin üçgen olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir. Buna göre aşağıdaki olasılıkları bulunuz.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & dd \end{cases}$$

a) P(-1< X < $\frac{1}{2}$) = ?

b) P(X$\leq \frac{3}{2}$) =?

c) P(X$\leq$ 3) =?

d) P(X $\geq$2,5) = ?

e) P($\frac{1}{4}$ < X< $\frac{3}{2}$) =?

ÇÖZÜM:

a) $P(-1 < X < \frac{1}{2}) = \int_{-1}^{0} 0.\ dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} x.\ dx = \frac{1}{8}$

b) $P(X \leq \frac{3}{2}) = \int_{-\infty}^{0} 0.\ dx + \int_{0}^{1} x.\ dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} (2-x)\ dx = \frac{7}{8}$

c) $P(X \leq 3) = 1$

d) $P(X \geq 2{,}5) = 0$

e) $P(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{2}) = \int_{\frac{1}{4}}^{1} x.\ dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} (2-x)\ dx = \frac{27}{32}$

DAĞILIM FONKSİYONU

$X: S \rightarrow A$

$P\{X \in A_1\} = P\{X \leq x\} = F(x)$

$A_1 = \{t \mid t \leq x\}$ ve $A \subseteq R$ iken,

$F(x) = \sum_{-\infty}^{x} p(t)$; x – kesikli

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) d_t$; x- sürekli

DAĞILIM FONKSİYONU

X'in verilen bir değere eşit veya küçük çıkma olasılığıyla ilgilenildiğinde, bu olasılığın doğrudan hesaplanması için F(x) fonksiyonu kullanılır. F(x)'e birikimli dağılım fonksiyonu denir.

ÖRNEK:

X : kesikli rassal değişkenin olasılık fonksiyonu;

p(x) = $\begin{cases} \frac{x}{10} \; ; x = 1,2,3,4 \\ 0 \quad ; \quad dd \end{cases}$

Dağılım fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM:

P{X≤x} = F(x) = $\sum_{-\infty}^{x} p(x)$ olduğundan

F(x) = $\sum_{t=1}^{x} \frac{t}{10} = \frac{1}{10} \sum_{t=1}^{x} t = \frac{1}{10} \left[\frac{x(x+1)}{2} \right]$

F(x) = $\begin{cases} 0; \quad x < 1 \\ \frac{x(x+1)}{20} \quad ; 1 \leq x < 4 \\ 1; \quad x \geq 4 \end{cases}$

P(X ≤ 3) =?

F(3) = $\frac{3(3+1)}{20} = \frac{3}{5}$

ÖRNEK:

X sürekli rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu ;

f(x) = $\begin{cases} \frac{8}{x^3} \; ; x \geq 2 \\ 0 \quad ; \quad dd \end{cases}$

a) Dağılım fonksiyonunu bulunuz.
b) P(X ≤ 5) =?

ÇÖZÜM:

a) F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)d_t$ = $\underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{2} f(t)d_t}}_{0}$ + $\int_{2}^{x} \frac{8}{t^3} d_t$ = 1 - $\frac{4}{x^2}$

F(x) = $\begin{cases} 0\,; x < 2 \\ 1 - \frac{4}{x^2} \;; x \geq 2 \end{cases}$

b) P(X ≤ 5) = $\int_{2}^{5} \frac{8}{x^3}\, dx$ = - $\frac{4}{x^2}$ = $\frac{21}{25}$ veya

F(5) = 1 - $\frac{4}{x^2}$ = $\frac{21}{25}$

ÖRNEK:

f(x)= k. $\frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun

değer kümesi A = {x | 3 ≤ x ≤ 5} olan x rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için k ne olmalıdır? Dağılım fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM:

∀ x ∈ A için f(x) ≥ 0 olmalıdır. Öyleyse k>0 olmalıdır.

$\int f(x) d_x$ = 1 olmalıdır.

$\int_{3}^{5} k \, \frac{1}{x^2} dx = 1$

k = $\frac{15}{2}$ olarak bulunur.

f(x) = $\frac{15}{2x^2}$

F(x) = $\int_{-\infty}^{x} \frac{15}{2t^2} dt = \frac{15}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x}\right)$

F(x) = $\begin{cases} 0 \quad ; \quad x < 3 \\ \frac{15}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x}\right); 3 \leq x < 5 \\ 1 \quad ; \quad x \leq 5 \end{cases}$

ÖRNEK:

$$p(x)=\begin{cases}\left(\frac{x}{k}\right); x = 1,3,5\\ 0;\ \text{dd}\end{cases}$$

olarak tanımlanan p(x) fonksiyonun olasılık fonksiyonu olabilmesi için k ne olmalıdır?

ÇÖZÜM:

$$\frac{1}{k}+\frac{3}{k}+\frac{5}{k} = 1$$

k = 9

$$p(x)=\begin{cases}\left(\frac{x}{9}\right); x = 1,3,5\\ 0;\ \text{dd}\end{cases}$$

ÖRNEK:

Kesikli x rassal değişkeninin;

p(x) = c (x^2 +4) ; x= 0,1,2,3

olasılık fonksiyonu olması için c ne olmalıdır?

ÇÖZÜM:

$\sum p(x)$ = 1 olması gerekir.

P(X=0)+ P(X=1)+ P(X=2)+ P(X=3)=1

4c+5c+8c+13c= 1

c = 1/30

ÖRNEK:

Kesikli x rassal değişkeninin;

p(x) = c $\binom{2}{x}\binom{3}{3-x}$; x=0,1,2

olasılık fonksiyonu olması için c ne olmalıdır?

ÇÖZÜM:

$\sum p(x)$ = 1 olması gerekir.

c $\binom{2}{0}\binom{3}{3}$ + c $\binom{2}{1}\binom{3}{2}$ + c $\binom{2}{2}\binom{3}{1}$ = 1

c = 1/10

ÖRNEK:

Reçeteye yazılan belli bir ilacın olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

X: ilacın yeteceği gün sayısı

$$f(x)=\begin{cases} \frac{20000}{(x+100)^3}; & x \geq 0 \\ 0 \quad ; & \text{dd} \end{cases}$$

Bu ilacın bir şişesinin;

a) En az 200 gün yetmesi

b) 80 ile 120 gün arasında yetmesi olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM:

a) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)d_t = \int_{-\infty}^{0} 0.d_t + \int_{0}^{x} \frac{20000}{(t+100)^3} d_t = 1- \frac{10000}{(x+100)^2}$

$$F(x) = \begin{cases} 1-\frac{10000}{(x+100)^2}; & x > 0 \\ 0 \quad ; & \text{dd} \end{cases}$$

P(X ≥ 200) = 1- F(200)

$= 1- [1-\frac{10000}{(200+100)^2}] = 1/9$

ÇÖZÜM:

b) P(80 < X < 120) = F(120)- F(80)

$= 1-\frac{10000}{(220)^2} -1 + \frac{10000}{(180)^2}$

= 0,102

ÖRNEK:

Bir otele isteği üzerine gönderilen 7 TV seti siparişinin 3'ü hasarlıdır. Otel rassal olarak 2 TV seti satın alacaktır.

X: otel tarafından satın alınacak hasarlı TV setlerinin sayısı iken,

X'in olasılık dağılımını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{4}{7}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{0}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{7}$$

$$P(x) = \begin{cases} \frac{2}{7}\ ; x = 0 \\ \frac{4}{7}\ ;\ x = 1 \\ \frac{1}{7}; x = 2 \\ 0; dd \end{cases}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x}\ ; 0 < x < 1 \\ 0\ , dd \end{cases}$$

fonksiyonunun,

a) bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için k ne olmalıdır?

b) Dağılım fonksiyonun bulunuz.

c) P(0,3<x<0,6) =?

ÇÖZÜM:

a) $\int_0^1 k\sqrt{x}\,d_x = 1$

k= $^3/_2$

b) F(x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)d_t = \int_{-\infty}^{0} f(t)d_t + \int_0^x f(t)d_t$

$= \int_0^x \frac{3}{2}\sqrt{t}d_t$

$= \sqrt{x^3}$

F(x)= $\begin{cases} 0; x \leq 0 \\ \sqrt{x^3}\,; 0 < x < 1 \\ 1\,; x > 1 \end{cases}$

ÇÖZÜM:

c) p(0,3<X<0,6) = F(0,6) – F(0,3)

$= \sqrt{0{,}6^3} - \sqrt{0{,}3^3}$

= 0,30044

CHEBYSHEV EŞİTSİZLİĞİ

X rassal değişkeninin,

- olasılık veya olasılık yoğunluk fonksiyonunun bilinmediği
- ancak ortalama ve varyansının bilindiği durumlarda

X rassal değişkeninin belirlenen aralıklarda değer alma olasılıklarının alt ve üst sınırı Chebyshev eşitsizliği yardımı ile bulunabilir.

CHEBYSHEV EŞİTSİZLİĞİ

X rassal değişkeninin ortalaması μ, varyansı σ^2 iken her bir $t \in R$ için

a) $P\{|X-\mu| \geq t.\sigma\} \leq \frac{1}{t^2}$

b) $P\{|X-\mu| < t.\sigma\} > 1-\frac{1}{t^2}$ olur.

ÖRNEK:

$\mu = 15$, $\sigma = 3$ ise bu rassal sistemden rasgele çekilen bir birimin ;

a) 18,6 ' ya eşit veya büyük, ya da 11,4 ' e eşit veya küçük çıkması olasılığının üst sınırını

b) 9 ile 21 arasında çıkması olasılığının alt sınırını bulunuz.

ÇÖZÜM:

a) $P\{X \leq 11{,}4 \text{ ve } X \geq 18{,}6\} \leq \frac{1}{t^2}$

$P\{X \leq 15-3.t \text{ ve } X \geq 15+3t\} \leq \frac{1}{t^2}$

$t = 1{,}2$

$P\{|X-15| \geq 1{,}2.3\} \leq \frac{1}{1{,}2^2}$

$\leq 0{,}6944$

ÇÖZÜM:

b) $P\{x|9<X<21\} > 1-\frac{1}{t^2}$

$= P\{15-t.3< X<15+ t.3\}> 1-\frac{1}{t^2}$

$t=2$

$P\{|X- 15 | \geq 2.3\}>1-\frac{1}{t^2}$

$>1-\frac{1}{4}$

$>$ ¾

ÖRNEK:

Bir taşıma şirketinin taşıdığı kolilerin ağırlığının

- ortalama değeri B[X] = 5,5 kg ve
- standart sapması ise 1 kg dır.

11 kg ve daha fazla ağırlığı olan kolilerin taşınma yüzdesi Chebyshev eşitsizliğini kullanarak bulunuz.

ÇÖZÜM:

X: koli ağırlığı (kg) $\mu=5{,}5$ $\sigma = 1$

$P(X \geq 11) = P (X-\mu \geq 11-5{,}5)$ (her iki taraftan μ değerini çıkarıyoruz)

$= P (X-\mu \geq 5{,}5)$

$= P (0 \geq X-\mu \geq 5{,}5)=P(|X-\mu|\geq 5{,}5)$

$= P (|X-\mu|\geq \underbrace{5{,}5}_{t}.\underbrace{(1)}_{\sigma}) \leq \frac{1}{(5{,}5)^2}$

$\leq 0{,}033$

ÖRNEK:

Bir firmanın malzeme müdürü siparişini verdiği valfin

- tedarik süresi ortalamasının μ= 8 gün;
- standart sapmasının ise σ = 1,5 gün olarak tahmin etmektedir.

Tedarik süresinin dağılımı bilinmemektedir. Malzeme müdürü tedarik süresi için gün olarak bir aralık belirlemek istemektedir. Tedarik süresinin bu aralıkta olması olasılığı en az $\frac{8}{9}$ ise; ilgili aralığı bulunuz.

ÇÖZÜM: μ= 8 ve σ = 1,5

$$P\{|x-\mu| < t.\sigma\} > 1-\frac{1}{t^2}$$

$$1-\frac{1}{t^2} = \frac{8}{9}$$

$$t=3$$

$\mu \pm t.\sigma$ aralık ise $8 \pm 3.\ 1{,}5$

$$P\{3{,}5 < X < 12{,}5\} > \frac{8}{9}$$

ÖRNEK:

Bir atölye sahibi işlerin ne kadar sürede tamamlandığının olasılık dağılımını bilmemektedir. Bununla beraber geçmiş deneyimlerden

- ortalama olarak 14 gün ve
- varyansının 2 gün olduğunu tahmin etmektedir.

İşlerin tamamlanma zamanı için öyle bir aralık bulun ki bu aralıkta tamamlanma olasılığı en az %75 olsun.

ÇÖZÜM: μ = 14 ve $\sigma = \sqrt{2}$

P{|X- μ |≥ t.σ} > 0,75

1-$\frac{1}{t^2}$ =0,75

t = 2

P{|X- 14 |≥ 2.$\sqrt{2}$} > 0,75

P(14-2.(1,44) < X < 14+2.(1,44)) >0,75

P(11,12 <X< 16,88) >0,75

ÖRNEK:

Bir posta servisi

- ortalama 2 gün,
- varyansı 0,4 $gün^2$ olacak şekilde dağıtım hizmeti vermektedir.

Bir kişi postasının en az %99 olasılıkla istenilen zamanda yerine ulaşmasını istiyor ise en erken ne zaman postaya vermelidir?

ÇÖZÜM:

P{|X- μ |≥ t.σ} > 0,99

1- $\frac{1}{t^2}$ =0,99

t = 10

P{|X - 2 |≥ 10.(0,63)}>0,99

P(4,3 < X <8,3) > 0,99 ise en erken 8,3 gün önce postaya vermelidir.