ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

İST 213 OLASILIK DERSİ

OLASILIĞA GİRİŞ

PROF. DR. NİHAL ERGİNEL

OLASILIĞA GİRİŞ

- Bugün yağmur yağma olasılığı % 75'dir.
- X marka bilgisayarın hiç servis gerektirmeden 100000 saat çalışması olasılığı %85'dir.

Olasılık modelleri;

Sıvı içindeki moleküllerin davranışlarını matematiksel olarak tarif etmek amacıyla ilk defa Robert Brown tarafından 1827 yılında tariflenmiştir.

1905 yılında Albert Einstein tarafından Brownian hareketlerini hipotezler ile açıkladı. Olasılık teorisi 17. ve 18. yy Fransa'da şans oyunları ile ortaya çıkmıştır. 1930'larda bilimsel temellere oturmuştur.

Klasik Tanım: Bir rassal deney sonucu karşılaşılabilir her olayın ortaya çıkma olasılığı aynı olsun.

S: örnek uzayı , O_i: i. olay iken;

s(S): Örnek uzayında karşılaşılabilir birim sayısı

s(O_i) : İlgilenilen O_i olayına ilişkin birim sayısı

P(O_i): O_i olayının ortaya çıkma olasılığı ise;

$$P(O_i)=\frac{s(O_i)}{s(S)}=\frac{ilgilenilen\ sonuç\ sayısı}{karşılaşılabilir\ sonuç\ sayısı}$$

Özellikleri:

- $O_i \subseteq S$ olduğundan, s(O_i) $\leq$ s(S) olur.

  Dolayısıyla P(O_i) = $\frac{s(O_i)}{s(S)} \leq 1$
- s(O_i) $\geq$ 0 , s(S)> 0 eşitsizliklerinden ;
  P(O_i) $\geq$ 0 ve s(S) = 1 elde edilir.

KOLMOGOROV'UN TANIMI VE OLASILIĞIN TEMEL TEOREMLERİ

Tanım: Bir rassal deneyin örnek uzayı S olsun. O olayı için, P(O), O olayının ortaya çıkma olasılığı ise;

1-) Her O $\subseteq$ S için P(O) $\geq$ 0
2-) P(S) = 1
3-) O_i ve O_j ayrık olaylar (kesişimleri boş küme ve birbirinden bağımsız) ise, yani $O_i \cap O_j = \emptyset$, (i≠j) için,
P($O_i \cup O_j$) = P(O_i) + P(O_j) 'dir.
4-) O_1 , O_2,.........,O_n karşılıklı ayrık olaylar ise;
P($O_1 \cup O_2 \cup \ldots . O_n$) =$\sum_{i=1}^{n} P(O_i)$ olur.

Teorem 1: $\emptyset$ boş küme iken, P($\emptyset$) = 0

Teorem 2: O , $\subseteq O_2$ ise $P(O_1) \leq P(O_2)$ olur.

Teorem 3: O, örnek uzayın herhangi bir olayı iken P(O) $\leq$ 1 olur.

Teorem 4: $\bar{O}$, bir O olayının tümleyeni ise;
$P(\bar{O}) = 1 - P(O)$

Teorem 5: O_1 ve O_2 S örnek uzayının iki olayı ise,
$P(O_1 \cup O_2) = P(O_1) + P(O_2) - P(O_1 \cap O_2)$ olur.
(**TOPLANABİLİRLİK KURALI**)

Teorem 6: $O_1 \neq \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$ ise ,
$P(O_1 \setminus O_2) = P(O_1 - O_2) = P(O_1) - P(O_1 \cap O_2)$ olur.

ÖRNEK:

Bir öğrenci,

- 5/8 olasılık ile matematik,
- 2/3 olasılık ile fizik,
- 10/24 olasılık ile her ikisinden de başarılı olabilmektedir.

a) Bu öğrencinin matematik dersini başaramaması olasılığı nedir?

b) Matematik veya fizik dersini başarması olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

a) Bu öğrencinin matematik dersini başaramaması:

O_1 : matematik dersini başarması

O_2 : fizik dersini başarması

$P(O_1) = \frac{5}{8}$, $P(O_2) = \frac{2}{3}$, $P(O_1 \cap O_2) = \frac{10}{24}$

$P(\bar{O}) = 1 - P(O) = \frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

ÇÖZÜM:

b) Matematik veya fizik dersini başarması olasılığı:

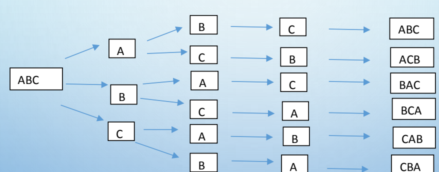
$$P(O_1 \cup O_2) = P(O_1) + P(O_2) - P(O_1 \cap O_2)$$
$$= \frac{5}{8} + \frac{2}{3} - \frac{10}{24}$$
$$= \frac{7}{8}$$

Faktöriyel: 1'den n ' e kadar ardışık tamsayıların çarpımı = n! şeklinde gösterilir.

Permütasyon: n nesnenin bir kısmı veya hepsi ile yapılan her farklı sıralamaya **permütasyon(dizilim)** denir.

- Sıra önemlidir.
- P_n ile gösterilir.

Ağaç Diyagramı (Çizelgesi):



ÖRNEK:

3 farklı iş 8 farklı makineye kaç değişik şekilde atanabilir?

$P_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$

n nesnenin,

- r_1 'i bir tür,
- r_2'si diğer tür ,
- r_k'sı başka bir tür ise,

bu n nesneden yapılabilir n'lik dizilem sayısı:

$\sum_{i=1}^{n} r_i$ = n olmak üzere,

$r_1, r_2, \ldots, r_k \, P_n = \frac{n!}{r_1! . r_2! \ldots r_k!}$ olur.

ÖRNEK:

3 kırmızı, 5 sarı, 4 mavi kitap bir rafa kaç farklı şekilde yerleştirilir?

$3,5,4 \, P_{12} = \frac{12!}{3!5!4!}$ = 27720 farklı şekilde dizilebilir.

➢ n farklı nesne bir daire etrafına P_n =(n-1)! Şekilde dizilebilir.

ÖRNEK:
6 kişi bir yuvarlak masa etrafına,
(6-1)! = 120 farklı şekilde oturabilir.

KOMBİNASYON (BİRLEŞİM)

Belirli sayıda nesneden oluşan bir kümenin öğelerinin bir kısmı seçilerek yapılabilir her farklı alt kümeye **kombinasyon** denir.

- n nesneden yapılabilir r'lik birleşim sayısı,

C_n^r veya $\binom{n}{r}$ ile gösterilir.

- $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ile bulunur.

ÖRNEK:

5 kişilik bir topluluktan 3 kişilik komisyon kaç farklı şekilde seçilir?

$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!}$ = 10 farklı şekilde oluşturulur.

ÖRNEK:

İçinde 5 beyaz, 15 kırmızı top bulunan torbadan

a)2 kırmızı top,

b) üç beyaz top,

c) 3 kırmızı-2 beyaz top kaç farklı şekilde seçilebilir?

ÇÖZÜM:

$a)\ C_{15}^{2} = \frac{15!}{2!(15-2)!}$ = 105

$b)\ C_{5}^{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$ = 10

$c)\ C_{15}^{3}.\ C_{5}^{2} = \frac{15!}{3!(15-3)!}.\ \frac{5!}{2!(5-2)!}$ = 4550 türlü seçilebilir.

ÖRNEK:

100 birimlik bir parti %5 kusurlu oranına sahiptir. Bu partiden iadesiz ve rassal olarak 10 birimlik örnek seçiliyor.

O_1 : 10 birimlik örnek içinde kusurlu birim bulunmaması ise; P(O_1) =?

ÇÖZÜM:

100 birimlik partiden 10 birimlik örnek;

$C_{100}^{10} = \frac{100!}{10!(100-10)!}$ Farklı şekilde seçilebilir.

s(O_1) = $\binom{5}{0} \cdot \binom{95}{10}$ ise;

P(O_1) = $\frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{95}{10}}{\binom{100}{10}}$ = 0,58375

ÖRNEK:

{a,b,c,d} kümesinden yapılabilir 2 birimlik birleşim kümesi kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

{ab} , {ac}, {ad} ,{bc} ,{bd}, {cd}

$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!}$ = 6

İKİ TERİMLİNİN BİNOM AÇILIMI

$(a+b)^n$,

$(a+b)^0$=1

$(a+b)^1$= a +b

$(a+b)^2$ = a^2 + 2ab + b^2

.

.

Yerine $(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$ yazılabilir.

$(1+x)^3 = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} . x + \binom{3}{2} . x^2 + \binom{3}{3} . x^3$ şeklinde yazılır.

$\frac{b}{a} = x$ alındığında;

$(a+b)^n = \binom{n}{0} . a^n + \binom{n}{1} . a^{n-1} . b + \binom{n}{2} . a^{n-2} . b^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n} . b^n$

$= a^n + n . a^{n-1} . b + \left(\frac{n-1}{2}\right) . a^{n-2} . b^2 + \ldots\ldots + b^n$

Kısaca; $\boldsymbol{(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} . a^{n-r} . b^r}$

şeklinde yazılabilir.

ÖRNEK:

$(3+5x)^4 = \binom{4}{0} . 3^4 + \binom{4}{1} . 3^3 . (5x) + \binom{4}{2} . 3^2 . (5x)^2$

$+ \binom{4}{3} . 3^1 . (5x)^3 + \binom{4}{4} . (5x)^4$

$= 81 + 540x + 1350\, x^2 + 1500\, x^3 + 625\, x^4$

KOŞULLU OLASILIK

O_1 ve O_2 aynı örnek uzayında tanımlanmış iki olay olsun. O_1 olayının ortaya çıktığı bilindiğinde , O_2 olayının ortaya çıkma olasılığı;

$P(O_1 \ / \ O_2) = \frac{P(O_2 \cap O_1)}{P(O_2)}$, $P(O_1) > 0$ iken

$P(O_i \ / \ O_j) = \frac{P(O_i \cap O_j)}{P(O_j)}$, $P(O_i) > 0$

ÖRNEK:

Bir işletmede mühendis / müdür, makine mühendisi, endüstri mühendisi mezunu sayıları aşağıda verilmiştir.

	MÜDÜR	MÜHENDİS	TOPLAM
MAKİNE	8	15	23
ENDÜSTRİ	10	17	27
TOPLAM	18	32	50

ÖRNEK:

a) Makine mezunu olan kişinin Müdür olması olasılığı nedir?

b) Müdür olan kişinin Endüstri Mühendisi olma olasılığı nedir?

c) Mühendis olan kişinin makine mühendisi mezunu olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

O_1 : Müdürler

O_2 : Mühendisler

O_3 : Makine mezunu

O_4 : Endüstri mezunu

	MÜDÜR	MÜHENDİS	TOPLAM
MAKİNE	8	15	23
ENDÜSTRİ	10	17	27
TOPLAM	18	32	50

$P(O_1) = \frac{18}{50}$, $P(O_2) = \frac{32}{50}$, $P(O_3) = \frac{28}{50}$, $P(O_4) = \frac{27}{50}$

$P(O_1 \cap O_3) = \frac{8}{50}$, $P(O_1 \cap O_4) = \frac{10}{50}$,

$P(O_2 \cap O_3) = \frac{15}{50}$, $P(O_2 \cap O_4) = \frac{17}{50}$

ÇÖZÜM:

a) $P(O_1 \ / O_3) = \frac{P(O_1 \cap O_3)}{P(O_3)} = \frac{8/50}{23/50} = \frac{8}{23}$

b) $P(O_4 \ / O_1) = \frac{P(O_1 \cap O_4)}{P(O_1)} = \frac{10/50}{18/50} = \frac{5}{9}$

c) $P(O_3 \ / O_2) = \frac{P(O_2 \cap O_3)}{P(O_2)} = \frac{15/50}{32/50} = \frac{15}{32}$

Koşullu Olasılığın Özellikleri:

1. $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $P(O_1 \cap O_2) = 0$ olduğundan;

   $P(O_2 / O_1) = 0$ ve $P(O_1 / O_2) = 0$ olur.

2. $O_1 \subseteq O_2$ ise $O_1 \cap O_2 = O_1$ ve $P(O_1 \cap O_2) = P(O_1)$ olduğundan;

   $P(O_2 \ / O_1) = \frac{P(O_1 \cap O_2)}{P(O_1)} = \frac{P(O_1)}{P(O_1)} = 1$ olur.

Koşullu Olasılığın Özellikleri:

3. $O_2 \subseteq O_1$ ise; $O_1 \cap O_2 = O_2$ ve $P(O_1 \cap O_2) = P(O_2)$ olduğundan;

$P(O_2 \ / O_1) = \frac{P(O_1 \cap O_2)}{P(O_1)} = \frac{P(O_2)}{P(O_1)}$ olur.

4. $P(O_i \cap O_j) \geq 0$ ve $P(O_j) > 0$ olduğuna göre;

$P(O_i / O_j) = \frac{P(O_i \cap O_j)}{P(O_j)} \geq 0$

5. $P(O_j / O_j) = 1$

Koşullu Olasılığın Özellikleri:

6. O_j verildiğinde O_i ve O_k ayrık olaylar ise, $P(O_i \cap O_k)=\emptyset$ olduğundan

$$P\{(O_i \cup O_k) / O_j\} = \frac{P(O_i \cap O_j) + P(O_k \cap O_j)}{P(O_j)}$$

$$= P(O_i / O_j) + P(O_k / O_j)$$

7. O_i ve O_j olaylarının ortaya çıktığı bilindiğinde O_k 'nın ortaya çıkma olasılığı;

$$P\{(O_k \cup O_i) / O_j\} = \frac{P\{(O_k \cap (O_i \cap O_j)\}}{P(O_i \cap O_j)}$$

Koşullu Olasılığın Özellikleri:

8. $P(O_2 / O_1) = \frac{P(O_1 \cap O_2)}{P(O_1)}$ ise;

$P(O_1 \cap O_2) = P(O_1).P(O_2 / O_1)$ veya

$P(O_1 / O_2) = \frac{P(O_1 \cap O_2)}{P(O_2)}$ ise;

$P(O_1 \cap O_2) = P(O_2).P(O_1 / O_2)$

ÖRNEK:

Bir tesiste karışık parçaların montajı yapılmaktadır. A ve B olmak üzere iki farklı montaj hattı vardır. A, B den daha eski ekipmanlara sahiptir ve bazen daha yavaş ve daha az güvenilir olmaktadır. Bir günde A montaj hattında 8 parça monte edilmiş ve 2 tanesi hatalı olarak bulunmuştur. B montaj hattında 10 parça monte edilmiş ve 1 tanesi hatalı olarak bulunmuştur. Monte edilen parçalardan rasgele 1 tane seçilmiş ve hatalı olarak bulunmuştur. Hatalı parçanın A da montajı yapılan parça olma olasılığı ve B de monte edilen parça olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

	Hatalı	**Hatasız**	Toplam
A	2	6	8
B	1	9	10
Toplam	3	15	18

A olayı: A da montaj olması
B olayı: B de montaj olması
H: hatalı olması
HTS: hatasız olmaması

$P(A)=\frac{8}{18}$, $P(B)=\frac{10}{18}$
$P(H)=\frac{3}{18}$, $P(HTS)=\frac{15}{18}$
$P(A\cap H)=\frac{2}{18}$, $P(B\cap H)=\frac{1}{18}$
$P(A\cap HTS)=\frac{6}{18}$, $P(B\cap HTS)=\frac{9}{18}$

ÇÖZÜM:

Seçilen parçanın hatalı olması durumunda A da montajı yapılan parça olması olasılığı

$$P(A/H) = \frac{P(A\cap H)}{P(H)} = \frac{2/18}{3/18} = \frac{2}{3}$$

B de montajı yapılması olması olasılığı

$$P(B / H) = \frac{P(B\cap H)}{P(H)} = \frac{1/18}{3/18} = \frac{1}{3}$$

UYGULAMA

Bir doğa parkına Kanada lisanslı araçların girme olasılığı %2 ‘dir. Bu araçlardan gelenlerin %28 ‘ i kamp amaçlı gelmektedir. Kanada lisanslı kamp amaçlı olarak parka gelenlerin oranı ise 0,09 ‘dur. Buna göre rassal olarak seçilen bir aracın;

a) Kamp amaçlı geldiği bilindiğinde Kanada lisansına sahip olma olasılığı nedir?
b) Kanada lisanslı olduğu bilindiğinde bunun kamp amaçlı gelme olasılığı nedir?
c) Parka giren bir aracın hem Kanada lisansına sahip olmaması hem de kamp amaçlı gelmemesi olasılığı nedir?

ÇÖZÜM:

O_1 :Kanada lisanslı araç

O_2 : Kamp amaçlı gelenler

$P(O_1) = 0,12$, $P(O_2) = 0,28$, $P(O_1 \cap O_2) = 0,09$

a-) $P(O_1 / O_2) = \frac{P(O_1 \cap O_2)}{P(O_2)} = \frac{0,09}{0,28} = 0,32$

b-) $P(O_2 / O_1) = \frac{P(O_1 \cap O_2)}{P(O_1)} = \frac{0,09}{0,12} = 0,75$

c-) $P(\overline{O_1 \cap O_2}) = 1 - P(O_1 \cap O_2) = 1 - 0,09 = 0,91$